

Boussole du cours

Question directrice : Comment une intégrale transforme-t-elle un débit ou un taux en quantité totale, comment lire $\int$ et dt , et pourquoi l'aire sous la courbe a-t-elle un sens physique ?

Ressource pédagogique en libre accès : ce contenu n'est ni une formation professionnelle, ni un diplôme, ni une certification, ni une habilitation. Les exemples sont pédagogiques et ne remplacent pas l'ingénierie, les essais et la qualification d'un matériel spatial réel.

1 — Une intégrale répond d'abord à une question très simple : « combien au total ? »

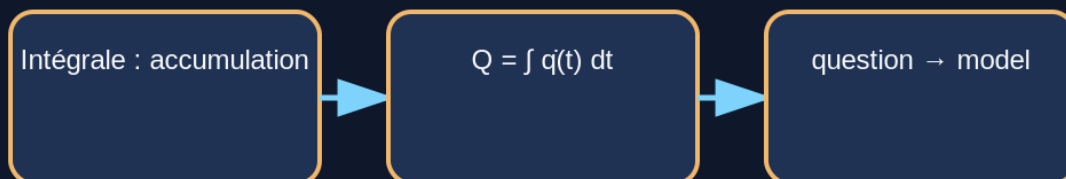
Une unité produit de l'eau à un certain débit. Connaître le débit à chaque instant ne suffit pas toujours : l'équipage veut savoir **combien de kilogrammes d'eau ont été produits au total** pendant la journée.

L'**intégrale** est un outil d'accumulation. Elle additionne une très grande quantité de petites contributions.

AM-01.12 · SPACE ACADEMY

Intégrale : accumulation

Schéma pédagogique 1



Comprendre le raisonnement, puis seulement calculer.

Un débit dit combien par unité de temps ; l'intégrale reconstruit le total accumulé.

2 — Comment lire $\int$, dt et les bornes ?

Le symbole $\int$ se lit « intégrale ». Il ressemble à un S allongé parce qu'il vient historiquement de l'idée de somme.

$\int q(t) dt$ se lit « **intégrale de q de t, d t** ». Ici $q(t)$ peut être un débit qui dépend du temps.

$\int_0^4 q(t) dt$ indique que l'on accumule entre $t=0$ et $t=4$. Les nombres 0 et 4 sont les **bornes** de l'intégrale.

Le petit **dt** rappelle que l'on additionne des contributions correspondant à de très petits morceaux de temps.

3 — Exemple complet n°1 : débit constant

Une unité d'extraction produit 2 kg d'eau par heure pendant 5 h.

$$\text{débit} = 2 \text{ kg/h} \text{ durée} = 5 \text{ h} \text{ total} = 2 \times 5 = 10 \text{ kg}$$

Avec un débit constant, l'intégrale se réduit ici à un rectangle : hauteur 2 kg/h, largeur 5 h. L'aire vaut 10 kg.

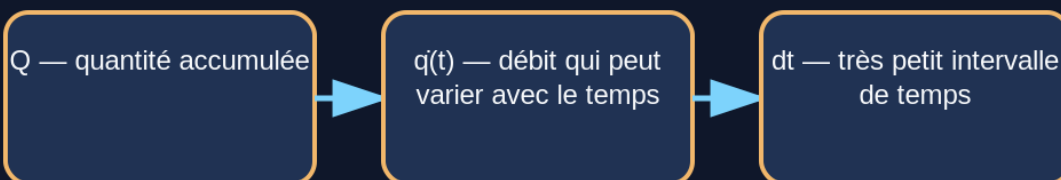
Pourquoi les heures disparaissent-elles ?

$(\text{kg/h}) \times \text{h} = \text{kg}$. Le temps se simplifie et il reste l'unité de la quantité accumulée.

AM-01.12 · SPACE ACADEMY

Intégrale : accumulation

Schéma pédagogique 2



Comprendre le raisonnement, puis seulement calculer.

$$\text{Aire} = \text{débit} \times \text{durée} = \text{quantité totale.}$$

4 — Exemple complet n°2 : le débit change pendant l'opération

Pendant 2 h, le système produit 3 kg/h. Pendant les 3 h suivantes, il produit 1 kg/h.

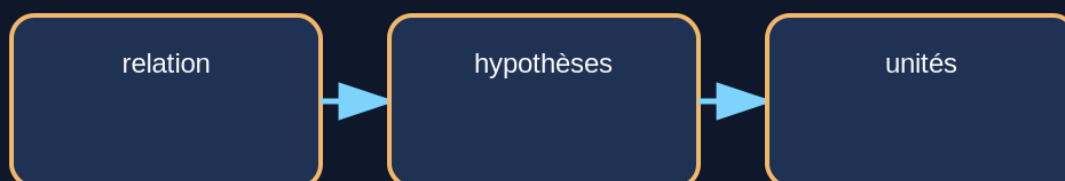
première période : $3 \times 2 = 6$ kg deuxième période : $1 \times 3 = 3$ kg
total = $6 + 3 = 9$ kg

L'intégrale additionne les contributions des deux périodes. Sur un graphique, cela correspond à additionner l'aire de deux rectangles.

AM-01.12 · SPACE ACADEMY

Intégrale : accumulation

Schéma pédagogique 3



Comprendre le raisonnement, puis seulement calculer.

Découper le temps en morceaux permet d'additionner les quantités produites sur chaque morceau.

5 — Exemple complet n°3 : un débit qui augmente progressivement

Supposons un exemple mathématique volontairement simple : $q(t)=t$ kg/h entre 0 h et 4 h. Le débit part de 0 kg/h et atteint 4 kg/h.

Le graphique forme un triangle de base 4 h et de hauteur 4 kg/h. Son aire vaut :

$$\text{aire} = \text{base} \times \text{hauteur} \div 2 \quad \text{aire} = 4 \times 4 \div 2 = 8 \text{ kg}$$

La même valeur s'écrit :

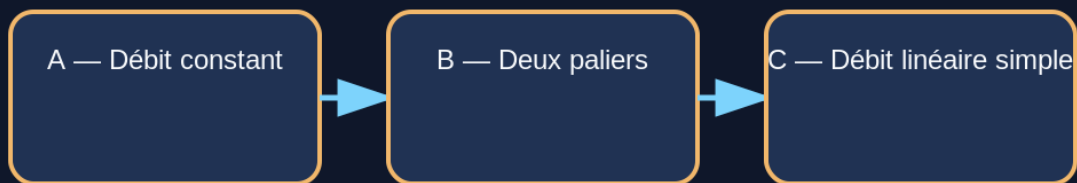
$$\int_0^4 t \, dt = 8$$

Le résultat est une masse : 8 kg.

AM-01.12 · SPACE ACADEMY

Intégrale : accumulation

Schéma pédagogique 4



Comprendre le raisonnement, puis seulement calculer.

L'intégrale relie une courbe de débit à la quantité totale accumulée.

6 — Pourquoi parle-t-on de « somme de petits rectangles » ?

Si le débit varie de façon irrégulière, on peut découper la durée en petits intervalles. Pour chaque intervalle, on estime :

$$\text{petite quantité} \approx \text{débit} \times \text{petite durée}$$

Puis on additionne toutes ces petites quantités. Plus les intervalles décrivent correctement la courbe, meilleure est l'estimation. L'intégrale formalise la limite de cette idée.

7 — Intégrale et dérivée : deux questions inverses

La dérivée demande : **à quelle vitesse le total change-t-il maintenant ?** L'intégrale demande : **si je connais ce rythme de changement, combien s'est accumulé au total ?**

Si la dérivée de la quantité d'eau est le débit, alors intégrer le débit au cours du temps permet de retrouver la variation de quantité d'eau.

Image mentale : le compteur de débit raconte « combien par seconde » ; le compteur totalisateur raconte « combien depuis le début ». Dérivée et intégrale relient ces deux vues.

8 — Avec des données réelles, on additionne souvent des mesures discrètes

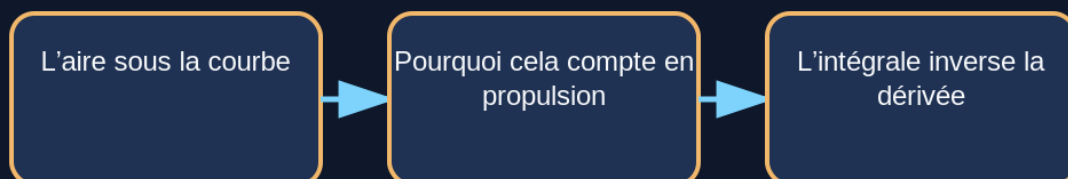
Un ordinateur ne reçoit pas forcément une fonction parfaite $q(t)$. Il peut recevoir une mesure de débit chaque seconde. Il calcule alors une somme numérique, par exemple avec des rectangles ou des trapèzes.

Il faut surveiller les données manquantes, le bruit, les erreurs de capteur et la durée réelle entre deux mesures. Une petite erreur répétée pendant des heures peut créer une erreur importante sur le total accumulé.

AM-01.12 · SPACE ACADEMY

Intégrale : accumulation

Schéma pédagogique 5



Comprendre le raisonnement, puis seulement calculer.

L'intégrale numérique additionne des contributions calculées à partir de mesures successives.

9 — Calculatrice : les trois cas à savoir reconnaître

1. **Débit constant** : multiplier débit $\times$ durée.
2. **Paliers** : calculer chaque rectangle puis additionner.
3. **Courbe simple** : utiliser une formule d'aire ou la fonction intégrale de la calculatrice si le modèle est connu.

Avant d'utiliser une touche $\int$, demandez toujours ce que représente l'aire et quelles unités doivent sortir.

10 — Ce qu'il faut retenir

- L'intégrale calcule une **accumulation**.
- $\int$ se lit « intégrale ».
- dt indique que l'accumulation se fait par petits morceaux de temps.
- L'aire sous une courbe de débit représente une quantité totale.
- Les unités doivent se transformer correctement : $(\text{kg/h}) \times \text{h} = \text{kg}$.
- La dérivée et l'intégrale répondent à des questions inverses.

Exercices corrigés

Exercice 1

Débit 4 kg/h pendant 3 h : total ?

$$4 \times 3 = 12 \text{ kg.}$$

Exercice 2

2 kg/h pendant 2 h puis 5 kg/h pendant 1 h : total ?

$$2 \times 2 + 5 \times 1 = 9 \text{ kg.}$$

Exercice 3

Pourquoi l'intégrale d'un débit en kg/s sur un temps en secondes donne-t-elle des kg ?

Parce que $(\text{kg/s}) \times \text{s} = \text{kg}$.

Sources primaires et techniques

- [NIST — SI Units](#)
- [NASA Johnson — life-support and mission engineering context](#)