

Boussole du cours

Question directrice : Que font e^x et $\ln$, comment se prononcent-ils, pourquoi sont-ils inverses et pourquoi $\ln$ apparaît-il dans l'équation idéale de la fusée ?

Ressource pédagogique en libre accès : ce contenu n'est ni une formation professionnelle, ni un diplôme, ni une certification, ni une habilitation. Les exemples sont pédagogiques et ne remplacent pas l'ingénierie, les essais et la qualification d'un matériel spatial réel.

1 — Une exponentielle : quand la quantité se multiplie au lieu d'ajouter toujours la même chose

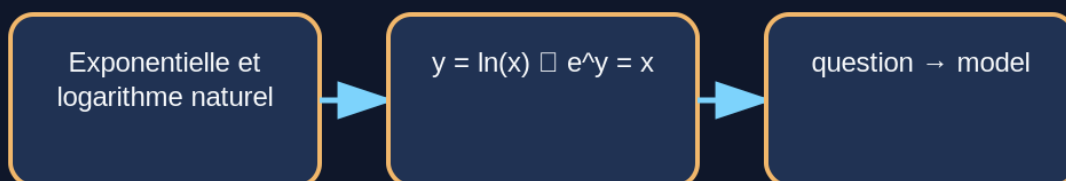
Si une réserve gagne exactement 10 kg chaque heure, sa croissance est régulière : +10, +10, +10. Une croissance **exponentielle** fonctionne autrement : la variation dépend de la quantité déjà présente. Une culture de micro-organismes qui double périodiquement passe par exemple de 1 à 2, puis 4, puis 8, puis 16 unités.

Le mot « exponentielle » vient du fait que le temps ou le nombre d'étapes apparaît dans un **exposant**, c'est-à-dire le petit nombre placé en hauteur dans une puissance.

AM-01.10 · SPACE ACADEMY

Exponentielle et logarithme naturel

Schéma pédagogique 1



Comprendre le raisonnement, puis seulement calculer.

Ajouter la même quantité et multiplier par le même facteur ne produisent pas la même évolution.

2 — Que signifie e^x et comment cela se prononce ?

e^x se lit « **e puissance x** ». La lettre **e** désigne un nombre particulier, environ 2,71828, qui apparaît naturellement lorsque l'on décrit des variations continues.

Pour débiter, il n'est pas nécessaire de mémoriser ses décimales. Il faut comprendre que **e^x transforme un exposant x en un facteur multiplicatif**.

Sur la calculatrice

Pour calculer e^2 , utilisez la touche **e^x** ou une fonction équivalente : $e^2 \approx 7,389$.

3 — Le logarithme naturel : la question inverse

Supposons maintenant que nous connaissions le facteur final et que nous cherchions l'exposant qui l'a produit. Le **logarithme naturel**, noté **ln**, fait précisément ce travail.

ln se prononce généralement « logarithme naturel » ; on entend aussi « elle-enne ».

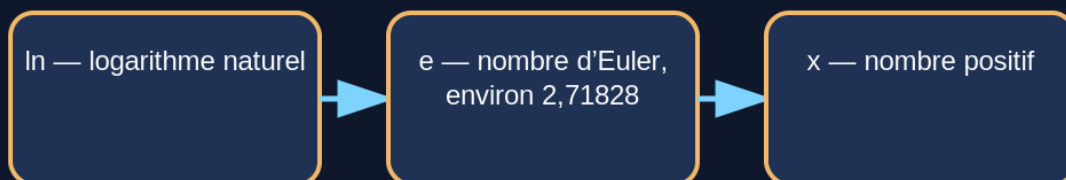
$$\text{si } e^x = N, \text{ alors } x = \ln(N)$$

Cette phrase se lit : « **si e puissance x égale N, alors x égale le logarithme naturel de N** ».

AM-01.10 · SPACE ACADEMY

Exponentielle et logarithme naturel

Schéma pédagogique 2



Comprendre le raisonnement, puis seulement calculer.

L'exponentielle va de x vers le facteur ; le logarithme remonte du facteur vers x .

4 — Exemple concret n°1 : combien de doublements pour atteindre une quantité ?

Une culture utile commence avec une quantité arbitraire 1. Elle double à chaque étape : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$.

Pour atteindre 8, nous observons directement qu'il faut 3 doublements, car $2^3 = 8$.

Avec un logarithme, on peut retrouver l'exposant : $x = \ln(8) \div \ln(2) \approx 2,079 \div 0,693 \approx 3$.

Pourquoi diviser par $\ln(2)$?

Parce que notre base de multiplication est 2. Le logarithme naturel mesure avec la base e ; la division par $\ln(2)$ convertit cette mesure en nombre de doublements.

5 — Exemple concret n°2 : pourquoi un logarithme apparaît dans l'équation de la fusée

Dans l'équation idéale de Tsiolkovski, une partie du calcul utilise le rapport entre la masse initiale m_0 et la masse finale m_1 :

$$\Delta v = v_e \times \ln(m_0 \div m_1)$$

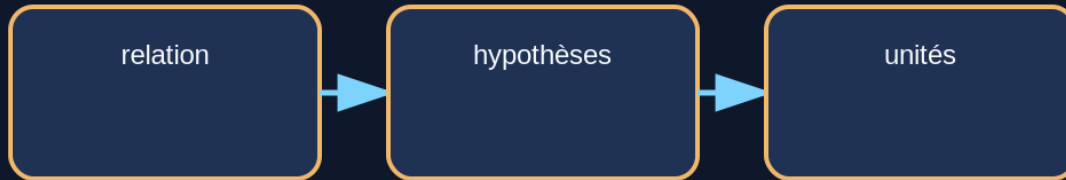
Δv se lit « delta vé » et représente ici un changement de vitesse. v_e se lit « vé e » et désigne la vitesse effective d'éjection dans ce modèle simplifié.

Si $m_0/m_1 = 2$, alors $\ln(2) \approx 0,693$. Si le rapport de masses double encore et devient 4, $\ln(4) \approx 1,386$: il a doublé, car $4 = 2^2$.

L'idée importante est que **le bénéfice ne croît pas proportionnellement au rapport de masses**. Ajouter toujours plus de propergol donne des gains de plus en plus coûteux en masse.

Exponentielle et logarithme naturel

Schéma pédagogique 3



Comprendre le raisonnement, puis seulement calculer.

Le logarithme transforme un rapport multiplicatif de masses en une contribution additive au changement de vitesse.

6 — Pourquoi l'intérieur de $\ln$ doit-il être sans unité ?

Dans $\ln(m_0/m_1)$, m_0 et m_1 sont toutes deux des masses. Si elles sont exprimées dans la même unité, par exemple en kilogrammes, les unités se simplifient : $\text{kg/kg} = 1$. Il reste un **rapport sans unité**.

On ne devrait pas écrire $\ln(500 \text{ kg})$ comme si « 500 kg » était un simple nombre abstrait. Le logarithme s'applique à un rapport ou à une quantité rendue sans dimension par rapport à une référence.

7 — Sur une calculatrice : $\ln$, e^x et erreurs fréquentes

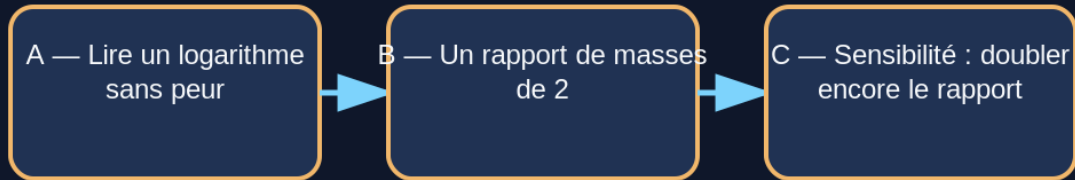
Pour calculer $\ln(2)$, tapez **2** puis la touche **ln** selon l'ordre de votre calculatrice. Vous devez obtenir environ 0,693.

Pour vérifier le chemin inverse, calculez $e^{0,693}$: vous retrouvez environ 2.

Ne confondez pas $\ln$ et $\log_{10}$. Certaines calculatrices ont une touche « log » pour le logarithme décimal et une touche « ln » pour le logarithme naturel. Les deux sont utiles, mais ils ne donnent pas le même nombre.

Exponentielle et logarithme naturel

Schéma pédagogique 4



Comprendre le raisonnement, puis seulement calculer.

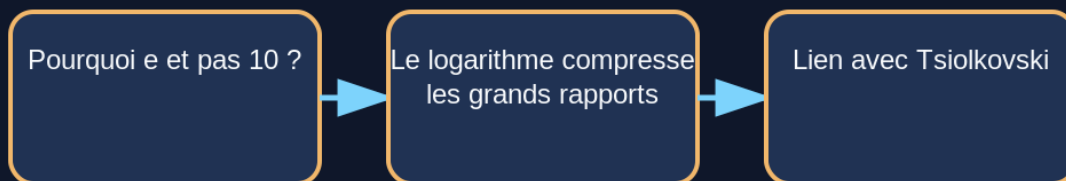
$\ln$ et e^x font des chemins inverses.

8 — Trois images mentales pour retenir

- **Exponentielle** : « si j'avance de x étapes, par quel facteur la quantité est-elle multipliée ? »
- **Logarithme** : « je connais le facteur final ; quel exposant a fallu pour l'obtenir ? »
- **Dans une fusée** : « quel effet produit un rapport de masses dans un modèle où chaque kilogramme de propergol embarqué doit lui-même être accéléré ? »

Exponentielle et logarithme naturel

Schéma pédagogique 5



Comprendre le raisonnement, puis seulement calculer.

Commencer par la question concrète, puis choisir la fonction qui répond à cette question.

Exercices corrigés

Exercice 1

Une quantité double 4 fois à partir de 1. Valeur finale ?

$$2^4 = 16.$$

Exercice 2

Calculer $\ln(2)$ puis $e^{\ln(2)}$.

$$\ln(2) \approx 0,693 ; e^{0,693} \approx 2.$$

Exercice 3

Pourquoi m_0/m_1 n'a-t-il pas d'unité si les deux masses sont en kg ?

Parce que kg/kg se simplifie. Le rapport compare deux masses exprimées dans la même unité.

Sources primaires et techniques

- [NASA Glenn — Rocket equation educational material](#)
- [NIST — SI and dimensionless quantities](#)