

Mathématiques utiles: des proportions aux dérivées

Comprendre le problème avant les équations

Question de départ — Mathématiques utiles: des proportions aux dérivées: comment « Algèbre: isoler l'inconnue sans perdre la physique » agit-il sur « Géométrie: surfaces, volumes et lois d'échelle », et quel repère issu de « Trigonométrie: transformer un angle en composantes » permet de vérifier la décision?

Intuition. Une équation affirme que deux expressions décrivent la même quantité. Si $E = P \cdot t$ et que l'on cherche t , on divise les deux côtés par P : $t = E/P$. [Leçon canonique.](#)

1

Algèbre: isoler l'inconnue sans perdre la physique

Une équation affirme que deux expressions décrivent la même quantité.

2

Géométrie: surfaces, volumes et lois d'échelle

Le disque a pour aire $A = \pi r^2$ et le cylindre pour volume $V = \pi r^2 h$. [Leçon canonique.](#)

3

Trigonométrie: transformer un angle en composantes

Pour un vecteur V incliné d'un angle θ au-dessus de l'horizontale, $V_x = V \cos\theta$ et $V_y = V \sin\theta$. [Leçon canonique.](#)

Repère concret. Si $E = P \cdot t$ et que l'on cherche t , on divise les deux côtés par P : $t = E/P$. [Leçon canonique.](#)

- Algèbre: isoler l'inconnue sans perdre la physique — Une équation affirme que deux expressions décrivent la même quantité.
- Géométrie: surfaces, volumes et lois d'échelle — Le disque a pour aire $A = \pi r^2$ et le cylindre pour volume $V = \pi r^2 h$. [Leçon canonique.](#)
- Trigonométrie: transformer un angle en composantes — Pour un vecteur V incliné d'un angle θ au-dessus de l'horizontale, $V_x = V \cos\theta$ et $V_y = V \sin\theta$. [Leçon canonique.](#)



Quatre repères à maîtriser — Mathématiques utiles: des proportions aux dérivées

Vecteurs: une direction fait partie de la donnée

Définition

Une masse est scalaire. Une force, une vitesse ou une accélération est vectorielle.

Intuition ou cas concret

Le même outil sert à additionner des erreurs de pointage ou des forces.

Repère quantitatif

Deux vitesses de 5 m/s, l'une vers l'est et l'autre vers le nord, donnent une norme résultante $\sqrt{5^2+5^2} \approx 7,07$ m/s, et non 10 m/s. [Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

Limite ou critère de vigilance

Le déplacement ne dit pas l'énergie consommée: le terrain, la pente et la vitesse peuvent rendre un trajet plus long énergétiquement même s'il est plus court géométriquement.

Exercice guidé — Vecteurs: une direction fait partie de la donnée

Cas « Vecteurs: une direction fait partie de la donnée » — Le même outil sert à additionner des erreurs de pointage ou des forces. Repère: Deux vitesses de 5 m/s, l'une vers l'est et l'autre vers le nord, donnent une norme résultante $\sqrt{5^2+5^2} \approx 7,07$ m/s, et non 10 m/s. Réserve: Le déplacement ne dit pas l'énergie consommée: le terrain, la pente et la vitesse peuvent rendre un trajet plus long énergétiquement même s'il est plus court... [Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

Corrigé raisonné — Vecteurs: une direction fait partie de la donnée

Point de départ

Une masse est scalaire. Une force, une vitesse ou une accélération est vectorielle.

Indice du cas

Deux vitesses de 5 m/s, l'une vers l'est et l'autre vers le nord, donnent une norme résultante $\sqrt{5^2+5^2} \approx 7,07$ m/s, et non 10 m/s. [Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

Réserve à appliquer

Le déplacement ne dit pas l'énergie consommée: le terrain, la pente et la vitesse peuvent rendre un trajet plus long énergétiquement même s'il est plus court géométriquement.

Conclusion

Additionner des vitesses, forces ou déplacements comme de simples nombres ignore l'orientation et peut produire une décision de navigation fautive.

Intégrale: accumuler un débit ou une puissance

Définition

L'intégrale additionne une grandeur distribuée. L'énergie est l'intégrale de la puissance sur le temps; la masse transférée est l'intégrale du débit massique.

Intuition ou cas concret

2 kW pendant 3 h puis 5 kW pendant 1 h: énergie?

Repère quantitatif

L'intégrale additionne une grandeur distribuée.

Limite ou critère de vigilance

Additionner des valeurs de puissance sans multiplier par leur durée n'a pas d'unité d'énergie et ne dimensionne aucune batterie.

Exercice guidé — Intégrale: accumuler un débit ou une puissance

Cas « Intégrale: accumuler un débit ou une puissance » — 2 kW pendant 3 h puis 5 kW pendant 1 h: énergie? Repère: L'intégrale additionne une grandeur distribuée. Réserve: Additionner des valeurs de puissance sans multiplier par leur durée n'a pas d'unité d'énergie et ne dimensionne aucune batterie.

Corrigé raisonné — Intégrale: accumuler un débit ou une puissance

Point de départ

L'intégrale additionne une grandeur distribuée. L'énergie est l'intégrale de la puissance sur le temps; la masse transférée est l'intégrale du débit massique.

Indice du cas

Sur deux paliers, 2 kW pendant 3 h apportent 6 kWh et 5 kW pendant 1 h ajoutent 5 kWh; l'aire totale sous $P(t)$ vaut donc 11 kWh.

Réserve à appliquer

Additionner des valeurs de puissance sans multiplier par leur durée n'a pas d'unité d'énergie et ne dimensionne aucune batterie.

Conclusion

L'intégrale traduit une grandeur instantanée en quantité cumulée: ici 11 kWh. Additionner seulement 2 et 5 kW donnerait 7 kW, qui reste une puissance et ne répond pas à la question énergétique.

Incertitudes: pire cas et erreurs indépendantes

Définition

Dix interfaces chacune tolérées à $\pm 0,1$ mm peuvent donner $\pm 1,0$ mm en pire cas arithmétique si toutes les erreurs vont dans le même sens. Si les erreurs sont indépendantes et centrées, la racine de la somme des carrés donne $\sqrt{10} \times 0,1 \approx 0,316$ mm. [Référence canonique](#).

Intuition ou cas concret

Ces valeurs ne se contredisent pas: elles reposent sur des hypothèses différentes.

Repère quantitatif

Dix interfaces chacune tolérées à $\pm 0,1$ mm peuvent donner $\pm 1,0$ mm en pire cas arithmétique si toutes les erreurs vont dans le même sens.

Limite ou critère de vigilance

Une erreur de calibration commune ne disparaît jamais grâce à une racine carrée.

Exercice guidé — Incertitudes: pire cas et erreurs indépendantes

Cas « Incertitudes: pire cas et erreurs indépendantes » — Ces valeurs ne se contredisent pas: elles reposent sur des hypothèses différentes. Repère: Dix interfaces chacune tolérées à $\pm 0,1$ mm peuvent donner $\pm 1,0$ mm en pire cas arithmétique si toutes les erreurs vont dans le même sens. Réserve: Une erreur de calibration commune ne disparaît jamais grâce à une racine carrée.

Corrigé raisonné — Incertitudes: pire cas et erreurs indépendantes

Point de départ

Dix interfaces chacune tolérées à $\pm 0,1$ mm peuvent donner $\pm 1,0$ mm en pire cas arithmétique si toutes les erreurs vont dans le même sens. Si les erreurs sont indépendantes et centrées, la racine de la somme des carrés donne $\sqrt{10} \times 0,1 \approx 0,316$ mm. [Référence canonique](#).

Indice du cas

Dix interfaces chacune tolérées à $\pm 0,1$ mm peuvent donner $\pm 1,0$ mm en pire cas arithmétique si toutes les erreurs vont dans le même sens.

Réserve à appliquer

Une erreur de calibration commune ne disparaît jamais grâce à une racine carrée.

Conclusion

L'incertitude doit donc accompagner l'architecture de mesure: références indépendantes, contrôles croisés et périodicité d'étalonnage.

Mini-projet: tampon d'eau et marges

Définition

Hypothèse: appoint moyen 40 kg/jour, autonomie 30 jours, marge de planification 25 %. Stock nominal = 1 200 kg; stock avec marge = 1 500 kg. [Référence canonique](#).

Intuition ou cas concret

Le calcul ne dimensionne pas le réservoir.

Repère quantitatif

Hypothèse: appoint moyen 40 kg/jour, autonomie 30 jours, marge de planification 25 %.

Limite ou critère de vigilance

Stock nominal = 1 200 kg; stock avec marge = 1 500 kg. [Référence canonique](#).

Exercice guidé — Mini-projet: tampon d'eau et marges

Cas « Mini-projet: tampon d'eau et marges » — Le calcul ne dimensionne pas le réservoir. Repère: Hypothèse: appoint moyen 40 kg/jour, autonomie 30 jours, marge de planification 25 %. Réserve: Stock nominal = 1 200 kg; stock avec marge = 1 500 kg. [Référence canonique](#).

Corrigé raisonné — Mini-projet: tampon d'eau et marges

Point de départ

Hypothèse: appoint moyen 40 kg/jour, autonomie 30 jours, marge de planification 25 %. Stock nominal = 1 200 kg; stock avec marge = 1 500 kg. [Référence canonique](#).

Indice du cas

Hypothèse: appoint moyen 40 kg/jour, autonomie 30 jours, marge de planification 25 %.

Réserve à appliquer

Stock nominal = 1 200 kg; stock avec marge = 1 500 kg. [Référence canonique](#).

Conclusion

Ce projet résume l'utilité des mathématiques: transformer une exigence verbale en équations, puis montrer où les hypothèses commandent la décision.

SPACE ACADEMY • MODULE 01
MATHÉMATIQUES UTILES
Les outils qui évitent les erreurs coûteuses

- 1 PROPORTIONS**
changer d'échelle sans se tromper
- 2 CONVERSIONS**
passer d'une unité à l'autre
 $1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$
 $1 \text{ kg} = 1\,000 \text{ g}$
 $1 \text{ L} = 1\,000 \text{ mL}$
- 3 10^x PUISSANCES DE 10**
lire et comparer les ordres de grandeur
 $10^{-3} = 0,001$
 $10^0 = 1$
 $10^3 = 1\,000$
 $10^6 = 1\,000\,000$
 $10^9 = 1\,000\,000\,000$
- 4 VÉRIFICATION**
contrôler si le résultat paraît plausible
 $2\,450 \times 18,6 = 45\,570 \approx 50\,000 ?$

À QUOI ÇA SERT ?

- dimensionner un stock
- estimer une énergie
- éviter les erreurs de facteur mille

Sur Mars, une erreur de calcul peut devenir une panne réelle.
DELTA-SIERRA • SPACE ACADEMY

Les mathématiques d'ingénierie transforment une question verbale en relations contrôlables. Le but n'est pas de mémoriser un catalogue de symboles, mais de savoir construire un modèle et vérifier ce qu'il suppose.

Chaque exemple martien est volontairement simplifié et identifié comme tel. Une valeur calculée dans un exercice n'acquiert pas le statut d'exigence de mission.

1. Algèbre: isoler l'inconnue sans perdre la physique

Une équation affirme que deux expressions décrivent la même quantité. Si $E = P t$ et que l'on cherche t , on divise les deux côtés par P : $t = E/P$. Nommer les symboles avant la manipulation est essentiel: E est une énergie, P une [puissance](#) et t une durée. Les unités kWh/kW donnent bien des heures. [Leçon canonique](#).

Exercice 1

Une batterie dispose de 180 kWh utilisables et alimente 12 kW constants. Durée idéale?

Correction: $t = 180/12 = 15$ h. Le résultat ne contient ni [rendement](#), ni réserve, ni vieillissement. [Référence canonique](#).

Quinze heures est une durée idéale obtenue en divisant une énergie disponible par une puissance constante. Un système réel retire ensuite réserve, rendement de conversion, vieillissement et puissance des auxiliaires avant de promettre une autonomie opérationnelle.

Données du cas

Exercice 1 — Une batterie dispose de 180 kWh utilisables et alimente 12 kW constants. Durée idéale?

Relation

Correction: $t = 180/12 = 15$ h. [Référence canonique](#).

Raisonnement

Correction: $t = 180/12 = 15$ h. Le résultat ne contient ni rendement, ni réserve, ni vieillissement. Quinze heures est une durée idéale obtenue en divisant une énergie disponible par une puissance constante. Un système réel retire ensuite réserve, rendement de conversion, vieillissement et puissance des auxiliaires avant de promettre une autonomie opérationnelle. [Référence canonique](#).

Résultat

$t = 180/12 = 15$ h. [Référence canonique](#).

Interprétation

Un système réel retire ensuite réserve, rendement de conversion, vieillissement et puissance des auxiliaires avant de promettre une autonomie opérationnelle.

Pourquoi cette idée compte

L'[algèbre](#) d'ingénierie consiste à isoler l'inconnue tout en gardant la signification physique visible. Chaque transformation doit être réversible et les unités doivent suivre les symboles.

Si $E=P t$, alors $t=E/P$. Une batterie offrant 90 kWh utiles et une charge constante de 6 kW donne 15 h idéales. [Leçon canonique](#).

Autonomie énergétique idéale

$$t = E/P$$

1 — Question concrète

La grandeur t repose sur un quotient: que donne E divisé par P ici?

2 — Intuition sans symboles

Une réserve d'énergie divisée par une puissance constante donne la durée idéale avant épuisement

3 — Grandeurs

t («té»): durée fournie par l'énergie disponible; E («e»): énergie disponible; P («pé»): puissance moyenne consommée.

4 — Formule

$$t = E/P$$

5 — Lecture

La relation se lit: « t égale E divisé par P ».

6 — Symboles et sens

t («té»): durée fournie par l'énergie disponible; E («e»): énergie disponible; P («pé»): puissance moyenne consommée.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

t en s ou h; E en J ou Wh; P en W. Puisque $1\text{ W} = 1\text{ J/s}$, énergie ÷ puissance donne une durée.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

On cherche une valeur relative plutôt qu'une différence: E est donc divisé par P. Le résultat t indique la taille du premier terme rapportée au second.

11 — Hypothèses

La puissance doit rester approximativement constante et l'énergie annoncée doit être réellement utilisable.

12 — Contrôle d'unités

t en s ou h; E en J ou Wh; P en W. Puisque $1\text{ W} = 1\text{ J/s}$, énergie ÷ puissance donne une durée. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Données numériques déjà explicitées dans la page: Si $E=P\ t$, alors $t=E/P$. Une batterie offrant 90 kWh utiles et une charge constante de 6 kW donne 15 h idéales.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Une seconde voie de calcul ou l'opération inverse doit retrouver la grandeur initiale.

16 — Estimation mentale

Le test mental porte sur la taille relative de E et P. Une réponse située du mauvais côté de 1, lorsque les deux termes sont positifs, révèle souvent une inversion.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $t = E/P$ » dans «Pourquoi cette idée compte», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

La sensibilité sépare les rôles: E renforce directement t; P l'atténue parce qu'il se trouve au dénominateur.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Une batterie fournit 120 kWh utiles à une charge constante de 8 kW. Calculez l'autonomie idéale.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$t = E/P = 120/8 = 15\text{ h}$. Le rapport kWh/kW donne bien des heures.

Exercice autonome. Calculez l'autonomie de 72 kWh à 4,5 kW.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$t = 72/4,5 = 16\text{ h}$.

21 — Décision mission

Cette durée est un premier horizon avant d'ajouter marges, pertes et charges variables.

La durée réelle peut être plus faible si la puissance varie, si une réserve minimale est imposée ou si la capacité dépend de la température.

2. Proportions: vérifier la linéarité avant la règle de trois

Une règle de trois suppose qu'un doublement de l'entrée double la sortie. Cette hypothèse convient parfois à un stock alimentaire de premier ordre, beaucoup moins à un hôpital, une centrale ou un atelier qui possèdent des coûts fixes et des seuils de **redondance**.

Avant d'extrapoler de 4 à 100 personnes, demandez quelle partie du système est proportionnelle à la population et quelle partie change par paliers. Une pompe de secours, un sas ou un laboratoire ne se multiplie pas nécessairement par le même facteur que la nourriture.

Lecture physique

La **proportion** est puissante seulement quand la relation est linéaire. Doubler la population double approximativement certains **flux** consommables, mais doubler une dimension géométrique ne double pas un volume.

À 0,4 kg/j d'appoint par personne, 20 personnes demandent 8 kg/j et 100 personnes 40 kg/j. En revanche, doubler le rayon d'un réservoir cylindrique quadruple sa section.

Passer d'un besoin individuel au dimensionnement collectif

$$q_{\text{total}} = N q_{\text{individuel}}; A = \pi r^2$$

1 — Question concrète

Dans «Lecture physique», quelles étapes faut-il suivre pour exploiter sans saut la chaîne « $q_{\text{total}} = N q_{\text{individuel}}; A = \pi r^2$ »?

2 — Intuition sans symboles

Un besoin par personne devient un besoin collectif en le multipliant par l'effectif ; la géométrie traduit ensuite ce besoin en taille physique

3 — Grandeurs

q_{total} («q total»): besoin total; N («enne»): nombre de personnes; $q_{\text{individuel}}$ («q individuel»): besoin par personne; A («a»): aire d'un disque; π («pi»): constante géométrique environ 3,14159; r («erre»): rayon du disque; V («vé»): volume d'un cylindre lorsqu'il apparaît; h («ache»): hauteur du cylindre lorsqu'elle apparaît. Le symbole r^2 se lit « r au carré » : il signifie $r \times r$.

4 — Formule

$$q_{\text{total}} = N q_{\text{individuel}}; A = \pi r^2$$

5 — Lecture

La relation se lit: «q indice total égale N q indice individuel; A égale pi r²». Ici, r^2 se lit « r au carré » et vaut $r \times r$.

6 — Symboles et sens

q_{total} («q total»): besoin total; N («enne»): nombre de personnes; $q_{\text{individuel}}$ («q individuel»): besoin par personne; A («a»): aire d'un disque; π («pi»): constante géométrique environ 3,14159; r («erre»): rayon du disque; V («vé»): volume d'un cylindre lorsqu'il apparaît; h («ache»): hauteur du cylindre lorsqu'elle apparaît. Le symbole r^2 se lit « r au carré » : il signifie $r \times r$.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

q_{total} garde l'unité totale correspondant à $q_{\text{individuel}} \times \text{personnes}$. Pour la géométrie, r et h sont des longueurs; $A = \pi r^2$ a une unité de longueur²; $V = \pi r^2 h$ une unité de longueur³.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Une chaîne de calcul n'est valide que si la sortie d'une étape est compatible avec l'entrée de la suivante. On conserve unités, définition et hypothèses entre les deux.

11 — Hypothèses

Les besoins individuels doivent utiliser la même période de référence et la géométrie doit correspondre à la forme réellement retenue.

12 — Contrôle d'unités

q_{total} garde l'unité totale correspondant à $q_{\text{individuel}} \times \text{personnes}$. Pour la géométrie, r et h sont des longueurs; $A = \pi r^2$ a une unité de longueur²; $V = \pi r^2 h$ une unité de longueur³. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Avec $q_{\text{individuel}} = 0,35 \text{ kg/personne/j}$ et $N = 30$, $q_{\text{total}} = N \times q_{\text{individuel}} = 30 \times 0,35 = 10,5 \text{ kg/j}$. Pour un réservoir de rayon $r = 1,5 \text{ m}$, $A = \pi r^2 = \pi \times 1,5^2 \approx 7,07 \text{ m}^2$.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Le contrôle indépendant consiste à réinjecter le résultat dans la relation de départ.

16 — Estimation mentale

Un ordre de grandeur est vérifié après chaque transformation, ce qui évite qu'une erreur précoce soit masquée par les calculs suivants.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $q_{\text{total}} = N q_{\text{individuel}}$; $A = \pi r^2$ » dans «Lecture physique», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

À N fixe, q_{total} varie linéairement avec $q_{\text{individuel}}$. Pour $A = \pi r^2$, +10 % de rayon multiplie l'aire par $1,10^2 = 1,21$, soit environ +21 %. À rayon fixe, V varie linéairement avec h .

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Dimensionnez un besoin collectif avec $0,35 \text{ kg/personne/j}$ pour 30 personnes, puis calculez la section d'un réservoir de rayon $1,5 \text{ m}$.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$q_{\text{total}} = Nq = 30 \times 0,35 = 10,5 \text{ kg/j}$. $A = \pi \times 1,5^2 \approx 7,07 \text{ m}^2$. Les deux mises à l'échelle sont différentes : linéaire pour le besoin, quadratique pour l'aire.

Exercice autonome. Avec $0,28 \text{ kg/personne/j}$ pour 50 personnes et $r = 2 \text{ m}$, refaites les deux calculs.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$q_{\text{total}} = 50 \times 0,28 = 14 \text{ kg/j}$; $A = \pi \times 2^2 \approx 12,57 \text{ m}^2$.

21 — Décision mission

La chaîne relie directement une hypothèse humaine à un dimensionnement d'habitat ou de stockage.

Une règle de trois appliquée à un système saturé, à une surface ou à une redondance donne souvent une extrapolation trompeuse.

3. Géométrie: surfaces, volumes et lois d'échelle

Le disque a pour aire $A = \pi r^2$ et le cylindre pour volume $V = \pi r^2 h$. Doubler un rayon quadruple une section; doubler toutes les dimensions d'un objet multiplie son volume par huit. C'est pourquoi une intuition linéaire échoue vite sur les réservoirs et habitats. [Leçon canonique](#).

Aire et volume d'un cylindre

$$A = \pi r^2; V = \pi r^2 h$$

1 — Question concrète

Dans «3. Géométrie: surfaces, volumes et lois d'échelle», quelles étapes faut-il suivre pour exploiter sans saut la chaîne « $A = \pi r^2$; $V = \pi r^2 h$ »?

2 — Intuition sans symboles

Le rayon fixe l'aire d'une section circulaire et cette aire, prolongée sur une hauteur, fixe le volume

3 — Grandeurs

A : aire de la base circulaire ; π : constante pi ; r : rayon du cylindre ; V : volume du cylindre ; h : hauteur du cylindre.

4 — Formule

$$A = \pi r^2; V = \pi r^2 h$$

5 — Lecture

La relation se lit: « A égale pi r^2 ; V égale pi $r^2 h$ ». Ici, r^2 se lit « r au carré » et vaut $r \times r$.

6 — Symboles et sens

$A = \pi r^2$ calcule l'aire de la base à partir du rayon. $V = Ah = \pi r^2 h$ multiplie cette aire par la hauteur pour obtenir le volume. Aucun symbole de débit ou d'effectif n'intervient dans cette leçon.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

r et h sont des longueurs. $A = \pi r^2$ s'exprime en unité de longueur au carré et $V = \pi r^2 h$ en unité de longueur au cube.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Une chaîne de calcul n'est valide que si la sortie d'une étape est compatible avec l'entrée de la suivante. On conserve unités, définition et hypothèses entre les deux.

11 — Hypothèses

Le modèle suppose une géométrie cylindrique et des dimensions mesurées dans un même système d'unités.

12 — Contrôle d'unités

π est sans dimension. Donc longueur² donne bien une aire et longueur² $\times$ longueur donne bien un volume. Aucune variable de débit ou d'effectif n'intervient.

13 — Cas numérique

Exemple pédagogique : pour un cylindre de rayon $r = 2$ m et de hauteur $h = 3$ m, $A = \pi r^2 = \pi \times 2^2 \approx 12,57$ m² et $V = Ah = \pi \times 2^2 \times 3 \approx 37,70$ m³. Le contrôle d'unités donne bien m² pour l'aire et m³ pour le volume.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Le contrôle indépendant consiste à réinjecter le résultat dans la relation de départ.

16 — Estimation mentale

Un ordre de grandeur est vérifié après chaque transformation, ce qui évite qu'une erreur précoce soit masquée par les calculs suivants.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $A = \pi r^2$; $V = \pi r^2 h$ » dans «3. Géométrie: surfaces, volumes et lois d'échelle», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Pour $A=\pi r^2$, une hausse de dix pour cent du rayon multiplie l'aire par $1,10^2=1,21$, soit environ vingt et un pour cent de plus. À rayon fixe, V varie linéairement avec h .

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Calculez l'aire de base et le volume d'un cylindre de $r = 1,2$ m et $h = 2,5$ m.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$$A = \pi r^2 = \pi \times 1,44 \approx 4,52 \text{ m}^2. V = Ah \approx 4,52 \times 2,5 = 11,31 \text{ m}^3.$$

Exercice autonome. Refaites pour $r = 0,8$ m et $h = 3$ m.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$$A = \pi \times 0,8^2 \approx 2,01 \text{ m}^2 ; V \approx 2,01 \times 3 = 6,03 \text{ m}^3.$$

21 — Décision mission

Ces relations transforment des dimensions en surface utile, volume pressurisé ou capacité de stockage.

Exercice 3

Réservoir cylindrique: $r = 1,2$ m, $h = 3,0$ m. Volume géométrique? [Référence canonique](#).

Correction: $\pi \times 1,2^2 \times 3 \approx 13,57 \text{ m}^3$. Le volume utile sera inférieur après structure, équipements et ullage. [Référence canonique](#).

Le calcul géométrique fournit seulement l'enveloppe. Un réservoir réel perd une partie du volume au profit des parois, structures internes, capteurs, espace gazeux et marges de fonctionnement; cette différence doit être inscrite avant tout bilan de stock.

Données du cas

Exercice 3 — Réservoir cylindrique: $r = 1,2$ m, $h = 3,0$ m. Volume géométrique? [Référence canonique](#).

Relation

Correction: $\pi \times 1,2^2 \times 3 \approx 13,57 \text{ m}^3$. [Référence canonique](#).

Raisonnement

Correction: $\pi \times 1,2^2 \times 3 \approx 13,57 \text{ m}^3$. Le volume utile sera inférieur après structure, équipements et ullage. Le calcul géométrique fournit seulement l'enveloppe. Un réservoir réel perd une partie du volume au profit des parois, structures internes, capteurs, espace gazeux et marges de fonctionnement; cette différence doit être inscrite avant tout bilan de stock. [Référence canonique](#).

Résultat

$$\pi \times 1,2^2 \times 3 \approx 13,57 \text{ m}^3. \text{ [Référence canonique](#).}$$

Contrôle

Le volume utile sera inférieur après structure, équipements et ullage.

Interprétation

cette différence doit être inscrite avant tout bilan de stock.

Étude de cas — pourquoi le volume change plus vite que la longueur

Considérez un réservoir cylindrique de rayon 1,5 m et de hauteur 4 m. Son volume vaut $\pi r^2 h \approx 28,27 \text{ m}^3$. Si toutes les dimensions linéaires sont multipliées par deux, le rayon devient 3 m et la hauteur 8 m: le volume devient environ $226,2 \text{ m}^3$, soit huit fois plus. La surface externe, elle, n'est multipliée que par quatre. Cette différence explique pourquoi les changements d'échelle modifient les bilans de structure, d'isolation et de stockage. [Référence canonique](#).

Inversement, doubler simplement la hauteur sans changer le rayon double le volume. Le mot « deux fois plus grand » est donc trop vague pour un calcul. Il faut préciser quelle dimension varie. Sur Mars, cela affecte la masse de parois, la surface à chauffer, les volumes pressurisés et les temps de transfert. La géométrie n'est pas une décoration du problème: elle détermine quelles grandeurs croissent comme L , L^2 ou L^3 . [Référence canonique](#).

Loi d'échelle d'un volume

$$V = \pi r^2 h$$

1 — Question concrète

Au passage «Exercice 3», quelle valeur de volume. obtient-on après avoir appliqué correctement l'exposant de $\pi r^2 h$?

2 — Intuition sans symboles

Lorsqu'on agrandit toutes les longueurs d'un même facteur, le volume varie avec le cube de ce facteur

3 — Grandeurs

V («vé»): volume du cylindre; π («pi»): constante géométrique environ 3,14159; r («erre»): rayon du cylindre; h («ache»): hauteur ou longueur axiale du cylindre. Le symbole r^2 se lit « r au carré » : il signifie $r \times r$.

4 — Formule

$$V = \pi r^2 h$$

5 — Lecture

La relation se lit: «V égale pi r²h». Ici, r^2 se lit « r au carré » et vaut $r \times r$.

6 — Symboles et sens

V («vé»): volume du cylindre; π («pi»): constante géométrique environ 3,14159; r («erre»): rayon du cylindre; h («ache»): hauteur ou longueur axiale du cylindre. Le symbole r^2 se lit « r au carré » : il signifie $r \times r$.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

Si r et h sont en mètres, r^2 est en m^2 et $V = \pi r^2 h$ en m^3 . Avec d'autres unités de longueur, les trois longueurs doivent être harmonisées avant calcul.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

πr^2 donne l'aire du disque de base; multiplier cette aire par la hauteur h donne le volume du cylindre.

11 — Hypothèses

La similitude géométrique doit être conservée ; changer une seule dimension ne suit pas la même loi d'échelle.

12 — Contrôle d'unités

Si r et h sont en mètres, r^2 est en m^2 et $V = \pi r^2 h$ en m^3 . Avec d'autres unités de longueur, les trois longueurs doivent être harmonisées avant calcul. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Exemple local déjà donné dans le cours: Considérez un réservoir cylindrique de rayon 1,5 m et de hauteur 4 m. Son volume vaut $\pi r^2 h \approx 28,27 m^3$. Si toutes les dimensions linéaires sont multipliées par deux, le rayon devient 3 m et la hauteur 8 m: le volume devient environ 226,2 m^3 , soit huit fois plus. La surface externe, elle, n'est multipliée que par quatre. Cette différence explique pourquoi les changements d'échelle modifient les bilans de structure, d'isolation et de stockage.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Revenir au résultat par l'opération inverse fournit un contrôle indépendant.

16 — Estimation mentale

Tester mentalement un facteur 2 sur la base: au carré le résultat est multiplié par 4, au cube par 8; ce repère détecte immédiatement un traitement linéaire erroné.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $V = \pi r^2 h$ » dans «Exercice 3», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

À hauteur fixe, +10 % de rayon multiplie V par 1,21. À rayon fixe, +10 % de hauteur donne +10 % de volume.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Un cylindre a $r = 2$ m et $h = 5$ m. Calculez V, puis le volume si toutes les longueurs doublent.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$V = \pi \times 2^2 \times 5 = 20\pi \approx 62,83 \text{ m}^3$. Après mise à l'échelle $\times 2$: $r=4$, $h=10$, $V=160\pi \approx 502,65 \text{ m}^3$, exactement 8 fois plus.

Exercice autonome. Que devient le volume si toutes les longueurs sont multipliées par 1,5 ?

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

Le volume est multiplié par $1,5^3 = 3,375$. Un volume initial de $62,83 \text{ m}^3$ devient $\approx 212,05 \text{ m}^3$.

21 — Décision mission

Cette loi empêche de sous-estimer très fortement masse, volume et besoins lorsqu'un système change d'échelle.

Passage au calcul

La géométrie devient une question de ressources dès qu'un habitat doit être pressurisé, chauffé, blindé ou fabriqué. Volume habitable, surface de paroi et masse de protection n'évoluent pas de la même façon.

Un cylindre de rayon 3 m et longueur 8 m offre $V \approx \pi \times 9 \times 8 \approx 226 \text{ m}^3$ hors aménagements. Une couche uniforme de régolithe de 2 m sur une surface externe de 100 m^2 représente 200 m^3 de matériau avant porosité. L'intérêt pédagogique est de voir les unités se transformer en décision — module 01 · Passage au calcul. [Référence canonique.](#)

Volumes de cylindre et de couche

$$V_{\text{cyl}} = \pi r^2 L; V_{\text{couche}} = A e$$

1 — Question concrète

Dans «Passage au calcul», quelles étapes faut-il suivre pour exploiter sans saut la chaîne « $V_{\text{cyl}} = \pi r^2 L$; $V_{\text{couche}} = A e$ » ?

2 — Intuition sans symboles

Deux géométries simples couvrent de nombreux problèmes : un cylindre pour un réservoir ou conduit, une surface multipliée par une épaisseur pour une couche

3 — Grandeurs

V_{cyl} («vé cylindre») : volume du cylindre; r («erre») : rayon; L («elle») : longueur; V_{couche} («vé couche») : volume de la couche; A («a») : aire couverte; e («e») : épaisseur de la couche; π («pi») : constante pi. Le symbole r^2 se lit « r au carré » : il signifie $r \times r$.

4 — Formule

$$V_{\text{cyl}} = \pi r^2 L; V_{\text{couche}} = A e$$

5 — Lecture

La relation se lit : «V indice cyl égale pi r²L; V indice couche égale A e». Ici, r^2 se lit « r au carré » et vaut $r \times r$.

6 — Symboles et sens

V_{cyl} («vé cylindre») : volume du cylindre; r («erre») : rayon; L («elle») : longueur; V_{couche} («vé couche») : volume de la couche; A («a») : aire couverte; e («e») : épaisseur de la couche; π («pi») : constante pi. Le symbole r^2 se lit « r au carré » : il signifie $r \times r$.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

V_{cyl} et V_{couche} en m^3 ; r , L et e en m ; A en m^2 ; π sans dimension.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Une chaîne de calcul n'est valide que si la sortie d'une étape est compatible avec l'entrée de la suivante. On conserve unités, définition et hypothèses entre les deux.

11 — Hypothèses

La forme réelle doit être suffisamment proche du modèle géométrique choisi.

12 — Contrôle d'unités

V_{cyl} et V_{couche} en m^3 ; r , L et e en m ; A en m^2 ; π sans dimension. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Données numériques déjà explicitées dans la page: Un cylindre de rayon 3 m et longueur 8 m offre $V \approx \pi \times 9 \times 8 \approx 226 \text{ m}^3$ hors aménagements. Une couche uniforme de régolithe de 2 m sur une surface externe de 100 m^2 représente 200 m^3 de matériau avant porosité.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Revenir au résultat par l'opération inverse fournit un contrôle indépendant.

16 — Estimation mentale

Un ordre de grandeur est vérifié après chaque transformation, ce qui évite qu'une erreur précoce soit masquée par les calculs suivants.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $V_{\text{cyl}} = \pi r^2 L$; $V_{\text{couche}} = A e$ » dans «Passage au calcul», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Une perturbation des données initiales est suivie tout au long des maillons afin d'identifier l'étape la plus sensible.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Calculez un volume cylindrique $r = 2 \text{ m}$, $L = 6 \text{ m}$ et une couche de $0,25 \text{ m}$ sur 40 m^2 .

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$$V_{\text{cyl}} = \pi r^2 L = \pi \times 4 \times 6 = 24\pi \approx 75,40 \text{ m}^3. \quad V_{\text{couche}} = A e = 40 \times 0,25 = 10 \text{ m}^3.$$

Exercice autonome. Refaites avec $r = 1,5 \text{ m}$, $L = 8 \text{ m}$ et une couche de $0,40 \text{ m}$ sur 30 m^2 .

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$$V_{\text{cyl}} = \pi \times 1,5^2 \times 8 = 18\pi \approx 56,55 \text{ m}^3 ; \quad V_{\text{couche}} = 30 \times 0,40 = 12 \text{ m}^3.$$

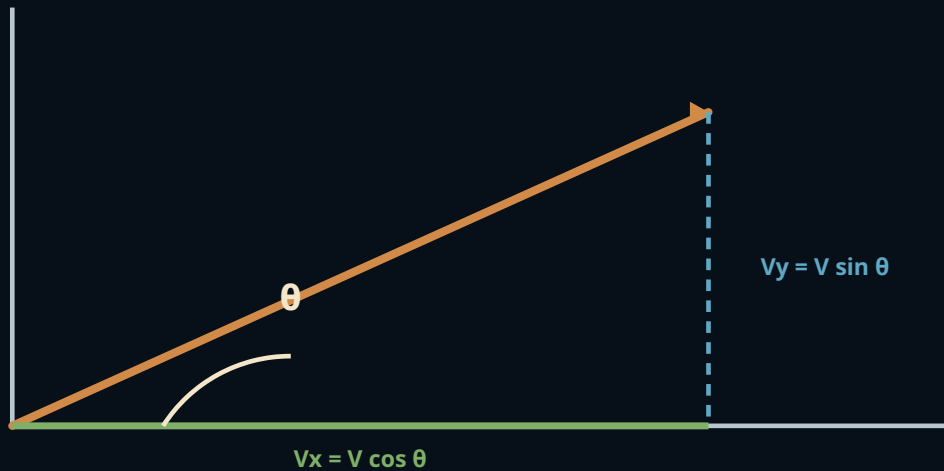
21 — Décision mission

Ces approximations donnent rapidement des ordres de grandeur de matériau, excavation ou capacité.

Une forme géométriquement efficace peut être difficile à construire, inspecter ou réparer; l'optimum mathématique n'est pas automatiquement l'optimum industriel.

Space Academy · 01

Vecteur et composantes / vector components



La direction fait partie de la donnée

Décomposition vectorielle: norme et angle deviennent deux composantes mesurables avant recombinaison.

4. Trigonométrie: transformer un angle en composantes

Pour un **vecteur** V incliné d'un angle θ au-dessus de l'horizontale, $V_x = V \cos \theta$ et $V_y = V \sin \theta$. Cette décomposition sert pour une pente, un bras robotique, une poussée inclinée ou une ligne de visée. [Leçon canonique](#).

La **calculatrice** doit être dans le bon mode. 30 degrés ne vaut pas 30 radians. Un contrôle graphique simple — les deux composantes doivent être inférieures à la norme — permet déjà de détecter une erreur.

Exercice 4

$V = 10 \text{ m/s}$ à 30° . Donnez V_x et V_y . [Référence canonique](#).

Correction: $V_x \approx 8,66 \text{ m/s}$ et $V_y = 5,00 \text{ m/s}$. [Leçon canonique](#).

Données du cas

Exercice 4 — $V = 10 \text{ m/s}$ à 30° . Donnez V_x et V_y . [Référence canonique](#).

Relation

Correction: $V_x \approx 8,66 \text{ m/s}$ et $V_y = 5,00 \text{ m/s}$. [Leçon canonique](#).

Raisonnement

Correction: $V_x \approx 8,66 \text{ m/s}$ et $V_y = 5,00 \text{ m/s}$. [Leçon canonique](#).

Résultat

$V_x \approx 8,66 \text{ m/s}$ et $V_y = 5,00 \text{ m/s}$. [Leçon canonique](#).

Point de contrôle

La **trigonométrie** transforme angle et longueur en composantes mesurables. Sur un terrain martien, elle intervient dans les pentes, les vecteurs de visée, les antennes, les forces et les trajectoires locales.

Une pente de 10° sur 100 m de distance horizontale correspond à environ 17,6 m de dénivelé puisque $\tan(10^\circ) \approx 0,176$. Un ingénieur garde séparés résultat numérique, **marge** et domaine de validité. [Référence canonique](#).

Dénivelé à partir d'une pente

$$\Delta z = d \tan \theta$$

1 — Question concrète

Quelle mise à l'échelle conjointe des facteurs fixe Δz dans «Point de contrôle»?

2 — Intuition sans symboles

Une distance horizontale et un angle de pente déterminent le dénivelé associé

3 — Grandeurs

Δz («delta z»): variation verticale ou différence d'altitude entre deux points; d («d»): distance du trajet ou du segment considéré; θ («thêta»): angle.

4 — Formule

$$\Delta z = d \tan \theta$$

5 — Lecture

La relation se lit: «delta z égale d tan thêta».

6 — Symboles et sens

Δz («delta z»): variation verticale ou différence d'altitude entre deux points; d («d»): distance du trajet ou du segment considéré; θ («thêta»): angle.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

Δz → distance en mètres ou kilomètres, avec base commune dans l'expression; d → distance en mètres ou kilomètres, avec base commune dans l'expression; angle → rad ou °.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

La formule « $\Delta z = d \tan \theta$ » assemble $d \tan \theta$ par multiplication. Cette opération est cohérente seulement si les dimensions combinées reproduisent bien celle de Δz .

11 — Hypothèses

L'angle doit être défini par rapport à l'horizontale et l'approximation doit rester compatible avec la géométrie du terrain.

12 — Contrôle d'unités

Δz → distance en mètres ou kilomètres, avec base commune dans l'expression; d → distance en mètres ou kilomètres, avec base commune dans l'expression; angle → rad ou °. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Exemple pédagogique : pour une distance horizontale $d = 100$ m et une pente $\theta = 10^\circ$, $\Delta z = 100 \times \tan(10^\circ) \approx 17,63$ m. Une estimation à faible angle donne un dénivelé de l'ordre de 18 m, cohérent avec le calcul.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Un calcul inverse doit reconstruire l'une des données de départ à l'arrondi près.

16 — Estimation mentale

Le produit de plusieurs facteurs peut changer vite d'échelle. Prévoir d'abord la décade de Δz à partir de celles des termes de $d \tan \theta$.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $\Delta z = d \tan \theta$ » dans «Point de contrôle», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Dans « $\Delta z = d \tan \theta$ », les sensibilités se composent par multiplication. Deux augmentations de 10 % ne font pas +20 % exactement, mais +21 %.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Calculez le dénivelé pour 250 m horizontaux à 6°.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$$\Delta z = d \tan \theta = 250 \times \tan 6^\circ \approx 250 \times 0,1051 = 26,28 \text{ m.}$$

Exercice autonome. Calculez le dénivelé pour 80 m à 12°.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$$\Delta z = 80 \times \tan 12^\circ \approx 80 \times 0,2126 = 17,01 \text{ m.}$$

21 — Décision mission

Ce calcul transforme une pente en contrainte d'accès, de terrassement ou de mobilité.

Il faut vérifier si la distance donnée est horizontale, le long de la pente ou une portée oblique: le même angle ne conduit pas à la même équation.

5. Vecteurs: une direction fait partie de la donnée

Une masse est scalaire. Une force, une vitesse ou une [accélération](#) est vectorielle. Deux vitesses de 5 m/s, l'une vers l'est et l'autre vers le nord, donnent une norme résultante $\sqrt{(5^2+5^2)} \approx 7,07$ m/s, et non 10 m/s. [Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

Le même outil sert à additionner des erreurs de pointage ou des forces. Choisir des axes clairs réduit un problème spatial à plusieurs problèmes scalaires puis permet de reconstruire la direction finale.

Étude de cas — additionner des déplacements, pas seulement des distances

Un rover se déplace 8 km vers l'est puis 6 km vers le nord. La distance parcourue est 14 km, mais le déplacement entre le départ et l'arrivée vaut $\sqrt{(8^2+6^2)}=10$ km. Son angle par rapport à l'est vaut $\arctan(6/8) \approx 36,9^\circ$. Cette distinction simple devient indispensable dès que l'on parle de navigation, de [vitesse](#) vectorielle ou de vent relatif. [Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

Si le même rover doit revenir au point de départ, la quantité pertinente pour le retour direct est le vecteur opposé, pas la somme historique des distances. Si un danger impose de contourner un cratère, la distance réelle redevient supérieure à la norme du déplacement. Un modèle d'autonomie doit donc savoir s'il calcule une géométrie idéale, une route praticable ou une distance cumulée. Les mathématiques permettent de garder ces objets distincts au lieu de les confondre sous le mot « distance ».

Norme d'un déplacement 2D

$$||d|| = \sqrt{(8 \text{ km})^2 + (6 \text{ km})^2} = 10 \text{ km}$$

1 — Question concrète

Dans «5. Vecteurs: une direction fait partie de la donnée», quelle valeur positive de $||d||$ correspond à la racine carrée définie par $||d|| = \sqrt{(8^2+6^2)}$?

2 — Intuition sans symboles

Deux déplacements perpendiculaires forment un triangle rectangle ; la distance directe est son hypoténuse

3 — Grandeurs

$||d||$ («norme de d»): longueur du déplacement net; 8 km: composante est-ouest; 6 km: composante nord-sud.

4 — Formule

$$||d|| = \sqrt{(8 \text{ km})^2 + (6 \text{ km})^2} = 10 \text{ km}$$

5 — Lecture

La relation se lit: « $||d||$ égale racine carrée de (8^2+6^2) ».

6 — Symboles et sens

$||d||$ («norme de d»): longueur du déplacement net; 8 km: composante est-ouest; 6 km: composante nord-sud.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

Les deux composantes sont en km; leurs carrés sont en km^2 ; la somme est en km^2 ; la racine carrée ramène le résultat en km.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Les deux déplacements sont perpendiculaires. Le théorème de Pythagore donne la norme du déplacement net: $\sqrt{(8^2+6^2)}=\sqrt{100}=10 \text{ km}$.

11 — Hypothèses

Les deux composantes doivent appartenir au même repère et être orthogonales.

12 — Contrôle d'unités

Les deux composantes sont en km; leurs carrés sont en km^2 ; la somme est en km^2 ; la racine carrée ramène le résultat en km. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Application chiffrée présente dans la page: Un rover se déplace 8 km vers l'est puis 6 km vers le nord. La distance parcourue est 14 km, mais le déplacement entre le départ et l'arrivée vaut $\sqrt{(8^2+6^2)}=10 \text{ km}$. Son angle par rapport à l'est vaut $\arctan(6/8)\approx 36,9^\circ$. Cette distinction simple devient indispensable dès que l'on parle de navigation, de vitesse vectorielle ou de vent relatif.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Un calcul inverse doit reconstruire l'une des données de départ à l'arrondi près.

16 — Estimation mentale

Encadrer la quantité sous la racine entre deux carrés connus; le résultat doit tomber entre leurs racines. Une valeur hors de cet intervalle révèle une erreur de saisie.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $||d|| = \sqrt{(8^2+6^2)}$ » dans «5. Vecteurs: une direction fait partie de la donnée», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Sensibilité: pour une racine carrée simple, une petite hausse de 10 % de la quantité sous le radical produit environ +4,9 % sur $||d||$, et non +10 %.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Un rover se décale de 9 km à l'est et 12 km au nord. Calculez le déplacement net.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$||d|| = \sqrt{(9^2+12^2)} = \sqrt{225} = 15 \text{ km}$. La distance parcourue en deux segments serait 21 km, différente du déplacement net.

Exercice autonome. Calculez la norme pour 5 km et 12 km.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$$\sqrt{(5^2+12^2)} = \sqrt{169} = 13 \text{ km.}$$

21 — Décision mission

La norme permet de convertir des composantes de navigation en distance directe.

Interprétation

Un vecteur possède une norme et une direction. Additionner des vitesses, forces ou déplacements comme de simples nombres ignore l'orientation et peut produire une décision de navigation fausse.

Un rover avance de 3 km vers l'est puis 4 km vers le nord: la distance parcourue est 7 km, mais le déplacement net vaut 5 km par Pythagore.

Norme d'un vecteur position

$$|r| = \sqrt{(3 \text{ km})^2 + (4 \text{ km})^2} = 5 \text{ km}$$

1 — Question concrète

Dans «Interprétation», quelle valeur positive de $|r|$ correspond à la racine carrée définie par $|r| = \sqrt{(3^2+4^2)}$?

2 — Intuition sans symboles

La longueur d'un vecteur position résume en une distance les composantes mesurées sur des axes perpendiculaires

3 — Grandeurs

$|r|$ («norme de r »): longueur du déplacement résultant; 3 km et 4 km: composantes perpendiculaires du déplacement.

4 — Formule

$$|r| = \sqrt{(3 \text{ km})^2 + (4 \text{ km})^2} = 5 \text{ km}$$

5 — Lecture

La relation se lit: « $|r|$ égale racine carrée de (3^2+4^2) ».

6 — Symboles et sens

$|r|$ («norme de r »): longueur du déplacement résultant; 3 km et 4 km: composantes perpendiculaires du déplacement.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

Les composantes sont en km; après élévation au carré et addition on obtient des km^2 ; la racine carrée redonne des km.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Pour deux composantes perpendiculaires, Pythagore donne $|r|=\sqrt{(3^2+4^2)}=5 \text{ km}$.

11 — Hypothèses

Les composantes doivent être exprimées dans le même repère et les mêmes unités.

12 — Contrôle d'unités

Les composantes sont en km; après élévation au carré et addition on obtient des km^2 ; la racine carrée redonne des km. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Cas numérique voisin du passage: Un rover avance de 3 km vers l'est puis 4 km vers le nord: la distance parcourue est 7 km, mais le déplacement net vaut 5 km par Pythagore.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Une seconde voie de calcul ou l'opération inverse doit retrouver la grandeur initiale.

16 — Estimation mentale

Encadrer la quantité sous la racine entre deux carrés connus; le résultat doit tomber entre leurs racines.

Une valeur hors de cet intervalle révèle une erreur de saisie.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $|r| = \sqrt{(3^2+4^2)}$ » dans «Interprétation», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Sensibilité: pour une racine carrée simple, une petite hausse de 10 % de la quantité sous le radical produit environ +4,9 % sur $|r|$, et non +10 %.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Calculez la norme du vecteur position (6,8) km.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$$|r| = \sqrt{(36+64)} = \sqrt{100} = 10 \text{ km.}$$

Exercice autonome. Calculez $|r|$ pour (7,24) km.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$$\sqrt{(49+576)} = \sqrt{625} = 25 \text{ km.}$$

21 — Décision mission

La norme fournit une distance au repère mais pas la direction ni le chemin praticable.

Le déplacement ne dit pas l'énergie consommée: le terrain, la pente et la vitesse peuvent rendre un trajet plus long énergétiquement même s'il est plus court géométriquement.

6. Fonctions et graphiques: voir les tendances

Une fonction associe une sortie à une entrée. Un graphique de puissance contre le temps révèle pics et cycles; une concentration de CO_2 révèle dérive et délai de contrôle; un rendement contre la charge révèle une zone d'exploitation préférée.

Toujours inspecter axes, unités, origine et échelle. Un axe tronqué exagère visuellement une variation. Un axe logarithmique encode des rapports. Le graphique est une représentation du modèle, pas une décoration.

Raisonnement de terrain

Une fonction relie une entrée à une sortie. Le graphique permet de voir seuils, saturation, dérives et zones où une approximation linéaire cesse d'être acceptable.

Si une batterie fournit 100 kWh utiles à 20 °C mais seulement 85 kWh dans un scénario froid, la capacité n'est pas une constante universelle; elle dépend d'un état. Un modèle peut écrire $E_{\text{utile}}=f(T,\text{âge},\text{puissance})$. [Leçon canonique](#).

[Référence canonique](#).

Fonction et dépendance entre variables

$y=f(x)$; $E_{\text{utile}}=f(T, \text{état}, \text{puissance})$

1 — Question concrète

Dans «Raisonnement de terrain», quelles étapes faut-il suivre pour exploiter sans saut la chaîne « $y=f(x)$; $E_{\text{utile}}=f(T, \text{état}, \text{puissance})$ »?

2 — Intuition sans symboles

Une fonction exprime qu'une grandeur de sortie dépend d'une ou plusieurs grandeurs d'entrée selon une règle définie

3 — Grandeurs

y («igrec»): sortie d'une fonction; x («ix»): entrée de cette fonction; f («effe»): règle qui associe une sortie à une ou plusieurs entrées; E_{utile} («E utile»): énergie utile; T («té»): température; état («état»): état du système; puissance («puissance»): puissance considérée. La notation $f(\dots)$ indique une dépendance, pas une multiplication.

4 — Formule

$y=f(x)$; $E_{\text{utile}}=f(T, \text{état}, \text{puissance})$

5 — Lecture

La relation se lit: « y égale $f(x)$; E indice utile égale $f(T, \text{état}, \text{puissance})$ ».

6 — Symboles et sens

y («igrec»): sortie d'une fonction; x («ix»): entrée de cette fonction; f («effe»): règle qui associe une sortie à une ou plusieurs entrées; E_{utile} («E utile»): énergie utile; T («té»): température; état («état»): état du système; puissance («puissance»): puissance considérée. La notation $f(\dots)$ indique une dépendance, pas une multiplication.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

y et x gardent les unités définies par le problème. E_{utile} s'exprime en J, Wh ou kWh; T en K ou °C selon le calcul; puissance en W ou kW; «état» peut être une variable discrète ou sans dimension. Une fonction peut relier des grandeurs d'unités différentes: sa forme précise doit définir comment.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Écrire $y=f(x)$ signifie seulement que y dépend de x selon une règle f . De même, $E_{\text{utile}}=f(T, \text{état}, \text{puissance})$ indique que l'énergie utile dépend de ces entrées. Sans expression explicite de f , on ne peut ni multiplier les entrées ni calculer une valeur numérique.

11 — Hypothèses

La règle de dépendance et le domaine de validité doivent être connus avant toute extrapolation.

12 — Contrôle d'unités

y et x gardent les unités définies par le problème. E_{utile} s'exprime en J, Wh ou kWh; T en K ou °C selon le calcul; puissance en W ou kW; «état» peut être une variable discrète ou sans dimension. Une fonction peut relier des grandeurs d'unités différentes: sa forme précise doit définir comment. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Exemple de contrôle issu du passage: Si une batterie fournit 100 kWh utiles à 20 °C mais seulement 85 kWh dans un scénario froid, la capacité n'est pas une constante universelle; elle dépend d'un état. Un modèle peut écrire $E_{\text{utile}}=f(T, \text{âge}, \text{puissance})$.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Revenir au résultat par l'opération inverse fournit un contrôle indépendant.

16 — Estimation mentale

Un ordre de grandeur est vérifié après chaque transformation, ce qui évite qu'une erreur précoce soit masquée par les calculs suivants.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $y=f(x)$; $E_{\text{utile}}=f(T, \text{état}, \text{puissance})$ » dans «Raisonnement de terrain», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Une perturbation des données initiales est suivie tout au long des maillons afin d'identifier l'étape la plus sensible.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Pour $f(x)=2x+5$, calculez $f(7)$, puis interprétez le résultat comme une dépendance entrée → sortie.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$f(7)=2 \times 7 + 5 = 19$. La fonction impose une règle unique : à l'entrée 7 correspond la sortie 19.

Exercice autonome. Avec $E_{\text{utile}}(T)=100-0,5(20-T)$, calculez E_{utile} à -10°C .

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$20 - (-10) = 30$; $0,5 \times 30 = 15$; $E_{\text{utile}} = 100 - 15 = 85 \text{ kWh}$. Le modèle explicite une dépendance à la température.

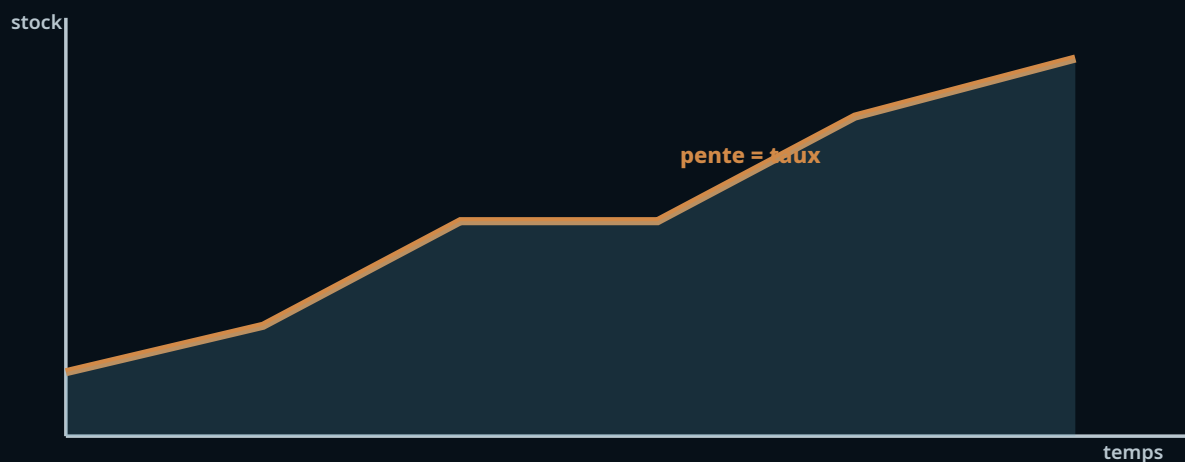
21 — Décision mission

Cette écriture aide à distinguer variable contrôlée, variable observée et résultat calculé.

Tracer une droite entre deux points mesurés n'autorise pas à l'extrapoler indéfiniment hors du domaine observé.

Space Academy · 01

Taux et accumulation / rate and accumulation



La pente décrit le taux ; l'aire ou la somme décrit l'accumulation

Du débit au stock: dérivée, intégration et bilan appliqués à une grandeur qui s'accumule.

7. Dérivée: suivre un taux de changement

Si $x(t)$ est une position, dx/dt est une vitesse et d^2x/dt^2 une accélération. Si $M(t)$ est la masse d'un réservoir, dM/dt est le débit net. La **dérivée** demande « à quelle vitesse la grandeur change-t-elle ici? ». [Référence canonique](#).

Sur des données discrètes, $\Delta M/\Delta t$ suffit comme pente moyenne. Cette pensée devient utile lorsqu'une fuite accélère, qu'une température dérive ou qu'un temps de réparation augmente plus vite que prévu. [Référence canonique](#).

Pourquoi cette idée compte

La dérivée mesure un taux de changement instantané. Elle permet de distinguer un stock encore acceptable mais qui se dégrade rapidement d'un stock faible mais stable.

Si un réservoir passe de 1 000 à 940 kg en 6 h, le taux moyen vaut -10 kg/h. Si ce rythme persiste, 240 kg seraient perdus en 24 h; la pente signale le problème avant que le réservoir soit vide.

Taux de variation moyen

$$dM/dt \approx \Delta M/\Delta t = -60 \text{ kg} / 6 \text{ h}$$

1 — Question concrète

Dans «Pourquoi cette idée compte», quelles étapes faut-il suivre pour exploiter sans saut la chaîne « $dM/dt \approx \Delta M/\Delta t = -60 \text{ kg} / 6 \text{ h}$ »?

2 — Intuition sans symboles

Une variation divisée par la durée correspondante donne la vitesse moyenne de changement d'un stock ou d'une grandeur

3 — Grandeurs

dM/dt (« dM/dt »): variation temporelle de masse; ΔM (« ΔM »): variation de masse; Δt (« Δt »): durée.

4 — Formule

$$dM/dt \approx \Delta M/\Delta t = -60 \text{ kg} / 6 \text{ h}$$

5 — Lecture

La relation se lit: « dM divisé par dt environ égal à ΔM divisé par Δt égale moins 60 kg divisé par 6».

6 — Symboles et sens

dM/dt (« dM/dt »): variation temporelle de masse; ΔM (« ΔM »): variation de masse; Δt (« Δt »): durée.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

dM/dt : kg/s, kg/min, kg/h ou kg/j selon le pas de temps choisi ; ΔM : kg ; Δt : s, min, h ou j. Dans le cas du cours, $\Delta M = -60 \text{ kg}$ et $\Delta t = 6 \text{ h}$, donc le taux est en kg/h.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Une chaîne de calcul n'est valide que si la sortie d'une étape est compatible avec l'entrée de la suivante. On conserve unités, définition et hypothèses entre les deux.

11 — Hypothèses

L'intervalle choisi doit être pertinent ; un taux moyen peut masquer des variations rapides à l'intérieur.

12 — Contrôle d'unités

Le contrôle dimensionnel donne $\text{kg} / \text{h} = \text{kg} \cdot \text{h}^{-1}$. Avec $-60 \text{ kg} / 6 \text{ h}$, le résultat est -10 kg/h . Omettre le h au dénominateur ferait perdre la dimension temporelle et rendrait l'équation incomplète.

13 — Cas numérique

Application chiffrée locale conservée: Si un réservoir passe de 1 000 à 940 kg en 6 h, le taux moyen vaut -10 kg/h. Si ce rythme persiste, 240 kg seraient perdus en 24 h; la pente signale le problème avant que le réservoir soit vide.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Revenir au résultat par l'opération inverse fournit un contrôle indépendant.

16 — Estimation mentale

Un ordre de grandeur est vérifié après chaque transformation, ce qui évite qu'une erreur précoce soit masquée par les calculs suivants.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $dM/dt \approx \Delta M/\Delta t = -60 \text{ kg} / 6 \text{ h}$ » dans «Pourquoi cette idée compte», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Une perturbation des données initiales est suivie tout au long des maillons afin d'identifier l'étape la plus sensible.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Un stock passe de 1 200 à 1 110 kg en 9 h. Calculez le taux moyen.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$\Delta M = 1\,110 - 1\,200 = -90 \text{ kg}$; $\Delta t = 9 \text{ h}$; $\Delta M/\Delta t = -10 \text{ kg/h}$.

Exercice autonome. Un autre stock passe de 800 à 740 kg en 3 h. Calculez le taux.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$\Delta M = -60 \text{ kg}$; $\text{taux} = -60/3 = -20 \text{ kg/h}$.

21 — Décision mission

Ce taux transforme une tendance en vitesse de perte, de production ou de dérive.

Une dérivée moyenne sur six heures peut masquer une fuite intermittente; la résolution temporelle du capteur fait partie du modèle.

8. Intégrale: accumuler un débit ou une puissance

L'intégrale additionne une grandeur distribuée. L'énergie est l'intégrale de la puissance sur le temps; la masse transférée est l'intégrale du débit massique. Avec des valeurs constantes, cela redevient simplement quantité = taux $\times$ durée. [Référence canonique](#).

Exercice 8

2 kW pendant 3 h puis 5 kW pendant 1 h: énergie?

Correction: $2 \times 3 + 5 \times 1 = 11 \text{ kWh}$. C'est une intégration par paliers. [Référence canonique](#).

Données du cas

Deux paliers de puissance: 2 kW pendant 3 h, puis 5 kW pendant 1 h.

Relation

Pour des paliers constants, l'énergie totale est la somme $E = \sum (P_i \times \Delta t_i)$. [Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

Raisonnement

Premier palier: $2 \times 3 = 6 \text{ kWh}$. Second palier: $5 \times 1 = 5 \text{ kWh}$. Additionner les deux contributions donne $6 + 5 = 11 \text{ kWh}$. [Référence canonique](#).

Résultat

L'énergie totale consommée est 11 kWh.

Contrôle

La puissance moyenne sur 4 h serait $11/4 = 2,75$ kW; $2,75 \times 4 = 11$ kWh, ce qui reproduit le même total par une seconde voie. [Référence canonique](#).

Interprétation

Cette somme par paliers est une forme simple d'intégration: chaque intervalle contribue à l'énergie selon sa puissance et sa durée.

Étude de cas — intégrer une puissance variable

Une charge électrique n'est pas toujours constante. Supposons qu'un chauffage tire 1 kW pendant 2 h, 3 kW pendant 4 h puis 0,5 kW pendant 6 h. L'énergie est l'aire sous la courbe puissance-temps: $1 \times 2 + 3 \times 4 + 0,5 \times 6 = 17$ kWh. Lorsque les valeurs sont données par intervalles, cette somme est une intégration discrète. [Référence canonique](#).

Avec des mesures chaque minute, on peut sommer $P_i \Delta t$. Avec une fonction continue $P(t)$, on écrit $E = \int P(t) dt$. La notation change, pas le sens physique: on accumule un débit d'énergie dans le temps. Cette idée apparaît aussi pour accumuler un débit d'eau, une production d'oxygène ou une dose. Avant d'intégrer, vérifiez les unités: kW $\times$ h donne kWh, kg/h $\times$ h donne kg. Une intégrale qui termine dans la mauvaise [unité](#) révèle un modèle mal posé. [Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

Somme d'énergies par phases

$$E = \sum P_i \Delta t$$

1 — Question concrète

Dans «Exercice 8», comment additionner les contributions indexées de « $E = \sum P_i \Delta t$ » pour reconstruire E?

2 — Intuition sans symboles

L'énergie totale d'un profil discret est la somme de la puissance de chaque phase multipliée par sa durée

3 — Grandeurs

Σ («sigma») : additionner ; E («e») : énergie; P_i (« P_i ») : puissance du poste i; Δt («delta t») : durée.

4 — Formule

$$E = \sum P_i \Delta t$$

5 — Lecture

La relation se lit: «E égale somme de $P_i \Delta t$ ».

6 — Symboles et sens

Σ («sigma») : additionner ; E («e») : énergie; P_i (« P_i ») : puissance du poste i; Δt («delta t») : durée.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

Énergie $\rightarrow$ J, Wh ou kWh; puissance du poste i $\rightarrow$ W ou kW; durée $\rightarrow$ s.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Le symbole Σ signifie qu'on applique la règle à chaque indice puis qu'on additionne les contributions. Le total ainsi recomposé est E.

11 — Hypothèses

Les phases doivent couvrir la période sans double comptage et utiliser des unités cohérentes.

12 — Contrôle d'unités

Énergie $\rightarrow$ J, Wh ou kWh; puissance du poste i $\rightarrow$ W ou kW; durée $\rightarrow$ s. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Exemple numérique déjà présent dans ce cours: Une charge électrique n'est pas toujours constante.

Supposons qu'un chauffage tire 1 kW pendant 2 h, 3 kW pendant 4 h puis 0,5 kW pendant 6 h. L'énergie est l'aire sous la courbe puissance-temps: $1 \times 2 + 3 \times 4 + 0,5 \times 6 = 17$ kWh. Lorsque les valeurs sont données par intervalles, cette somme est une intégration discrète.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Revenir au résultat par l'opération inverse fournit un contrôle indépendant.

16 — Estimation mentale

Estimer le plus gros terme et le nombre de contributions; pour des valeurs positives, E doit au moins égaler le maximum individuel sans dépasser grossièrement leur nombre multiplié par ce maximum.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $E = \sum P_i \Delta t$ » dans «Exercice 8», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Faire varier une seule contribution de Δ modifie E du même Δ , éventuellement multiplié par son coefficient.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Additionnez l'énergie de trois phases : 2 kW pendant 3 h, 5 kW pendant 2 h et 1 kW pendant 4 h.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$$E = 2 \times 3 + 5 \times 2 + 1 \times 4 = 6 + 10 + 4 = 20 \text{ kWh.}$$

Exercice autonome. Calculez 1,5 kW pendant 6 h puis 4 kW pendant 1,5 h.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$$E = 1,5 \times 6 + 4 \times 1,5 = 9 + 6 = 15 \text{ kWh.}$$

21 — Décision mission

Cette somme construit un budget énergétique à partir d'un planning d'opérations.

Lecture physique

L'intégrale additionne une grandeur distribuée dans le temps ou l'espace. En exploitation, elle transforme puissance en énergie, débit en masse ou concentration inhalée en exposition cumulée selon le modèle choisi.

Une charge de 8 kW pendant 2 h puis 3 kW pendant 6 h consomme $16 + 18 = 34$ kWh. Graphiquement, c'est l'aire sous la courbe $P(t)$. [Référence canonique](#).

Intégrale de puissance et approximation discrète

$$E = \int P \, dt \approx \sum P_i \Delta t_i$$

1 — Question concrète

Dans «Lecture physique», quelles étapes faut-il suivre pour exploiter sans saut la chaîne « $E = \int P \, dt \approx \sum P_i \Delta t_i$ »?

2 — Intuition sans symboles

Lorsque la puissance varie continûment, l'énergie est l'aire accumulée sous la courbe de puissance ; une somme de petits intervalles l'approxime

3 — Grandeurs

E (« e ») : énergie cumulée ; $\int$ (« intégrale ») : opérateur d'intégration, c'est-à-dire une manière d'accumuler continûment de très petites contributions $P \cdot dt$ au cours du temps ; P (« pé ») : puissance instantanée ; t (« té ») : temps ; $\sum$ (« sigma ») : somme discrète utilisée quand on remplace la courbe continue par des paliers ; P_i : puissance du palier i ; Δt_i : durée de ce palier.

4 — Formule

$$E = \int P \, dt \approx \sum P_i \Delta t_i$$

5 — Lecture

La relation se lit: «E égale intégrale de P dt environ égal à somme de P indice i delta t indice i».

6 — Symboles et sens

E (« e ») : énergie cumulée ; $\int$ (« intégrale ») : opérateur d'intégration, c'est-à-dire une manière d'accumuler continûment de très petites contributions $P \cdot dt$ au cours du temps ; P (« pé ») : puissance instantanée ; t (« té ») : temps ; $\sum$ (« sigma ») : somme discrète utilisée quand on remplace la courbe continue par des paliers ; P_i : puissance du palier i ; Δt_i : durée de ce palier.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

E en J, Wh ou kWh; P et P_i en W ou kW; t et Δt_i en s ou h selon le système cohérent. Puissance $\times$ durée donne une énergie.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

L'intégrale $\int P \, dt$ accumule l'énergie fournie ou consommée instant après instant : géométriquement, c'est l'aire sous la courbe P(t). La somme $\sum P_i \Delta t_i$ est l'approximation par paliers de cette même accumulation.

11 — Hypothèses

L'approximation discrète doit employer des pas suffisamment fins lorsque la puissance change rapidement.

12 — Contrôle d'unités

E en J, Wh ou kWh; P et P_i en W ou kW; t et Δt_i en s ou h selon le système cohérent. Puissance $\times$ durée donne une énergie. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Exemple de contrôle issu du passage: Une charge de 8 kW pendant 2 h puis 3 kW pendant 6 h consomme $16+18=34$ kWh. Graphiquement, c'est l'aire sous la courbe P(t).

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Un calcul inverse doit reconstruire l'une des données de départ à l'arrondi près.

16 — Estimation mentale

Un ordre de grandeur est vérifié après chaque transformation, ce qui évite qu'une erreur précoce soit masquée par les calculs suivants.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $E = \int P \, dt \approx \sum P_i \Delta t_i$ » dans «Lecture physique», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Une perturbation des données initiales est suivie tout au long des maillons afin d'identifier l'étape la plus sensible.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Approximez l'intégrale d'une puissance par trois paliers : 6 kW pendant 2 h, 4 kW pendant 3 h, 2 kW pendant 5 h.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$$E \approx \sum P_i \Delta t_i = 6 \times 2 + 4 \times 3 + 2 \times 5 = 12 + 12 + 10 = 34 \text{ kWh.}$$

Exercice autonome. Avec 7 kW pendant 1 h puis 3 kW pendant 4 h, calculez l'énergie.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$$E \approx 7 \times 1 + 3 \times 4 = 7 + 12 = 19 \text{ kWh.}$$

21 — Décision mission

Cette relation relie télémétrie de puissance et énergie réellement consommée.

Additionner des valeurs de puissance sans multiplier par leur durée n'a pas d'unité d'énergie et ne dimensionne aucune batterie.

9. Exponentielles et logarithmes: raisonner en rapports

Une **exponentielle** apparaît lorsque le taux d'évolution dépend de la quantité présente. Le **logarithme** est son opération inverse. Sans faire un cours complet de calcul analytique, il faut savoir reconnaître qu'une croissance exponentielle franchit rapidement plusieurs **ordres de grandeur**.

Les logarithmes sont aussi utiles pour représenter des grandeurs couvrant des échelles immenses. Une droite sur un axe log ne s'interprète pas comme une droite sur un axe linéaire; l'échelle choisie fait partie de la lecture.

Passage au calcul

Les exponentielles décrivent des évolutions proportionnelles à l'état courant; les logarithmes permettent d'inverser ces relations ou de comparer des ordres de grandeur. Ils apparaissent dans décroissance, cinétique, **fiabilité** et certains modèles thermiques ou biologiques.

Avec une dégradation idéale de 2 % par cycle, la fraction restante après 20 cycles est $0,98^{20} \approx 0,668$. Ce n'est pas 60 % de perte par simple addition: la base diminue à chaque cycle. L'intérêt pédagogique est de voir les unités se transformer en décision — module 01 · Passage au calcul · étape 2. [Référence canonique](#).

Accumulation d'une perte répétée

$$f_n = (1-r)^n$$

1 — Question concrète

Au passage «Passage au calcul», quelle valeur de f_n obtient-on après avoir appliqué correctement l'exposant de $(1-r)^n$?

2 — Intuition sans symboles

Une petite perte répétée de nombreuses fois se compose multiplicativement et peut devenir importante

3 — Grandeurs

f_n («effe indice enne»): fraction restante après n étapes; r («erre»): fraction perdue à chaque étape, comprise entre 0 et 1; n («enne»): nombre d'étapes ou de cycles, entier sans dimension.

4 — Formule

$$f_n = (1-r)^n$$

5 — Lecture

La relation se lit: « f indice n égale (1 moins r) ^{n} ».

6 — Symboles et sens

f_n («effe indice enne»): fraction restante après n étapes; r («erre»): fraction perdue à chaque étape, comprise entre 0 et 1; n («enne»): nombre d'étapes ou de cycles, entier sans dimension.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

f_n et r sont sans dimension; n est un comptage sans dimension.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

À chaque étape, la fraction conservée vaut $1-r$. Répéter la même conservation n fois revient à multiplier n fois le facteur $1-r$, donc à l'élever à la puissance n .

11 — Hypothèses

Le même taux est supposé s'appliquer à chaque cycle et les cycles sont traités comme successifs.

12 — Contrôle d'unités

f_n et r sont sans dimension; n est un comptage sans dimension. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Exemple local déjà donné dans le cours: Avec une dégradation idéale de 2 % par cycle, la fraction restante après 20 cycles est $0,98^{20} \approx 0,668$. Ce n'est pas 60 % de perte par simple addition: la base diminue à chaque cycle.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Revenir au résultat par l'opération inverse fournit un contrôle indépendant.

16 — Estimation mentale

Tester mentalement un facteur 2 sur la base: au carré le résultat est multiplié par 4, au cube par 8; ce repère détecte immédiatement un traitement linéaire erroné.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $f_n = (1-r)^n$ » dans «Passage au calcul», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Sensibilité: pour $y \propto x^n$, une petite variation relative de x est approximativement multipliée par n dans y ; c'est pourquoi un carré est deux fois plus sensible en pourcentage qu'une relation linéaire.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Une capacité perd 3 % à chaque cycle pendant 10 cycles. Calculez la fraction restante.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$f_n = (1-0,03)^{10} = 0,97^{10} \approx 0,737$. Il reste environ 73,7 %, donc la perte cumulée est $\approx 26,3$ %.

Exercice autonome. Avec 1 % de perte sur 50 cycles, calculez la fraction restante.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$0,99^{50} \approx 0,605$. Il reste environ 60,5 %.

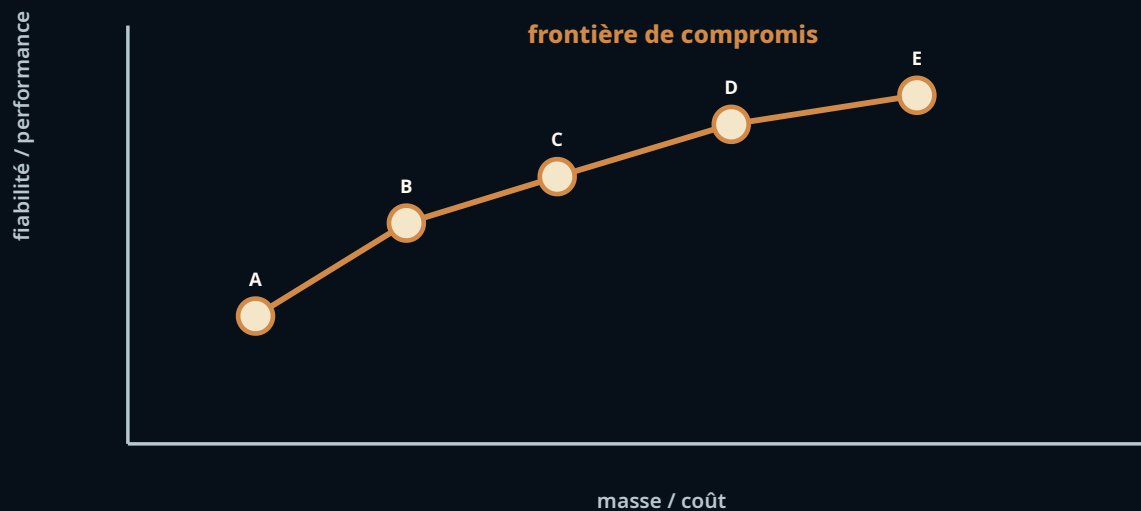
21 — Décision mission

Cette loi montre pourquoi une efficacité légèrement inférieure à cent pour cent peut fortement peser sur une longue campagne.

Un modèle exponentiel doit être justifié par le mécanisme; il ne suffit pas qu'une courbe ressemble visuellement à une exponentielle.

Space Academy · 01

Optimisation multi-objectif / multi-objective optimization



Une contrainte élimine ; une préférence arbitre

Compromis d'optimisation: visualiser les critères concurrents avant de choisir une architecture.

10. Incertitudes: pire cas et erreurs indépendantes

Dix interfaces chacune tolérées à $\pm 0,1$ mm peuvent donner $\pm 1,0$ mm en pire cas arithmétique si toutes les erreurs vont dans le même sens. Si les erreurs sont indépendantes et centrées, la racine de la somme des carrés donne $\sqrt{10 \times 0,1} \approx 0,316$ mm. [Référence canonique](#).

Ces valeurs ne se contredisent pas: elles reposent sur des hypothèses différentes. Une erreur de calibration commune ne disparaît jamais grâce à une [racine carrée](#). Le modèle d'erreur doit donc accompagner le résultat.

Étude de cas — incertitude et décision

Un assemblage comporte quatre dimensions mesurées avec des incertitudes indépendantes de $\pm 0,20$, $\pm 0,10$, $\pm 0,15$ et $\pm 0,05$ mm. Le pire cas arithmétique additionne les amplitudes: $\pm 0,50$ mm. Si les erreurs sont véritablement indépendantes, centrées et compatibles avec une combinaison quadratique, la racine de la somme des carrés vaut environ 0,274 mm. Ces deux nombres répondent à des modèles différents; on ne choisit pas le plus petit parce qu'il est plus agréable.

Dans une chaîne de fabrication martienne, une erreur d'étalonnage commune peut rendre l'hypothèse d'indépendance fausse. Quatre instruments calibrés avec la même référence biaisée peuvent tous se tromper dans le même sens. L'incertitude doit donc accompagner l'architecture de mesure: références indépendantes, contrôles croisés et périodicité d'étalonnage. La formule n'efface jamais la structure réelle des erreurs.

Pire cas par somme des incertitudes

pire cas = $0,20 \text{ mm} + 0,10 \text{ mm} + 0,15 \text{ mm} + 0,05 \text{ mm} = 0,50 \text{ mm}$

1 — Question concrète

Dans «10. Incertitudes: pire cas et erreurs indépendantes», quelle valeur cumulée pire cas résulte des termes de «pire cas = $0,20 \text{ mm} + 0,10 \text{ mm} + 0,15 \text{ mm} + 0,05 \text{ mm} = 0,50 \text{ mm}$ »?

2 — Intuition sans symboles

Si toutes les erreurs possibles poussent dans le même sens, leur somme donne une borne prudente

3 — Grandeurs

Les quatre contributions d'incertitude sont $0,20 \text{ mm}$, $0,10 \text{ mm}$, $0,15 \text{ mm}$ et $0,05 \text{ mm}$. Le **pire cas** est leur somme absolue lorsque toutes peuvent décaler le résultat dans la même direction.

4 — Formule

Pire cas = $0,20 \text{ mm} + 0,10 \text{ mm} + 0,15 \text{ mm} + 0,05 \text{ mm} = 0,50 \text{ mm}$

5 — Lecture

La relation se lit: «pire cas égale $0,20 \text{ mm} + 0,10 \text{ mm} + 0,15 \text{ mm} + 0,05 \text{ mm} = 0,50 \text{ mm}$ ».

6 — Symboles et sens

Chaque terme représente une contribution d'incertitude exprimée en millimètres. Le total pire cas conserve cette unité et vaut ici $0,50 \text{ mm}$. Le signe $\pm$ rappelle que l'écart peut être envisagé de part et d'autre de la valeur nominale selon la convention du problème.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

Toutes les contributions sont en **millimètres (mm)**. Elles peuvent donc être additionnées directement. Si une contribution était donnée en μm ou en cm , elle devrait être convertie en mm avant la somme.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Le signe «+» indique que les quantités contribuent au même bilan. Elles sont rendues compatibles puis combinées en un seul total pire cas.

11 — Hypothèses

Cette borne suppose une combinaison volontairement défavorable et ne décrit pas la probabilité du résultat.

12 — Contrôle d'unités

Le contrôle d'unités est $\text{mm} + \text{mm} + \text{mm} + \text{mm} = \text{mm}$. Le total $0,50 \text{ mm}$ est donc dimensionnellement cohérent avec les quatre incertitudes de départ ; il n'est pas sans dimension.

13 — Cas numérique

Cas du cours : $0,20 \text{ mm} + 0,10 \text{ mm} + 0,15 \text{ mm} + 0,05 \text{ mm} = 0,50 \text{ mm}$. En pire cas, on retient donc une incertitude cumulée de $\pm 0,50 \text{ mm}$ si les quatre contributions peuvent se combiner défavorablement.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Le contrôle indépendant consiste à réinjecter le résultat dans la relation de départ.

16 — Estimation mentale

Comparer mentalement le nombre de termes et leur taille typique pour prévoir l'échelle de pire cas; le total ne doit pas contredire cette estimation.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour «pire cas = $0,20 \text{ mm} + 0,10 \text{ mm} + 0,15 \text{ mm} + 0,05 \text{ mm} = 0,50 \text{ mm}$ » dans «10. Incertitudes: pire cas et erreurs indépendantes», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Chaque variation additive d'une contribution se transmet au total; tester les termes dominants en priorité mesure la robustesse de pire cas.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Additionnez en pire cas $\pm 0,12$, $\pm 0,08$ et $\pm 0,05 \text{ mm}$.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$u_{\text{pire}} = 0,12 + 0,08 + 0,05 = 0,25 \text{ mm}$. On suppose ici que toutes les erreurs peuvent s'aligner défavorablement.

Exercice autonome. Calculez le pire cas pour $\pm 0,20$, $\pm 0,15$, $\pm 0,10$ et $\pm 0,05 \text{ mm}$.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$$0,20+0,15+0,10+0,05 = 0,50 \text{ mm.}$$

21 — Décision mission

Le pire cas fournit une limite de sûreté simple quand les conséquences d'un dépassement sont fortes.

Point de contrôle

Les incertitudes peuvent être combinées en pire cas ou, sous hypothèses d'indépendance, par une somme quadratique. Le choix dépend de la question de sûreté et de la nature des erreurs.

Dix interfaces à $\pm 0,1$ mm donnent $\pm 1,0$ mm en empilement arithmétique. Si les erreurs sont indépendantes, centrées et comparables, l'écart quadratique vaut $\sqrt{10} \times 0,1 \approx 0,316$ mm. Un ingénieur garde séparés résultat numérique, marge et domaine de validité. [Référence canonique](#).

Combinaison quadratique d'incertitudes indépendantes

$$u_{\text{RSS}} = \sqrt{(\sum u_i^2)}$$

1 — Question concrète

Dans «Point de contrôle», quelle valeur positive de u_{RSS} correspond à la racine carrée définie par $u_{\text{RSS}} = \sqrt{(\sum u_i^2)}$?

2 — Intuition sans symboles

Des incertitudes indépendantes ne s'additionnent pas toujours linéairement ; leur combinaison quadratique représente mieux leur dispersion collective

3 — Grandeurs

u_{RSS} («u R S S»): incertitude combinée par racine de la somme des carrés; u_i («u indice i»): contribution d'incertitude i exprimée dans la même unité que la grandeur finale; Σ («sigma»): somme sur toutes les contributions.

4 — Formule

$$u_{\text{RSS}} = \sqrt{(\sum u_i^2)}$$

5 — Lecture

La relation se lit: «u indice RSS égale racine carrée de (somme de u indice i²)».

6 — Symboles et sens

u_{RSS} («u R S S»): incertitude combinée par racine de la somme des carrés; u_i («u indice i»): contribution d'incertitude i exprimée dans la même unité que la grandeur finale; Σ («sigma»): somme sur toutes les contributions.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

Tous les u_i doivent être exprimés dans la même unité physique. u_i^2 a l'unité au carré; la somme garde cette unité²; la racine carrée ramène u_{RSS} à l'unité initiale. Pour des incertitudes relatives, toutes sont sans dimension.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Pour des contributions indépendantes selon le modèle RSS, on additionne leurs variances u_i^2 puis on prend la racine carrée afin de revenir à l'échelle de la grandeur.

11 — Hypothèses

L'indépendance et la signification statistique des termes doivent être justifiées.

12 — Contrôle d'unités

Tous les u_i doivent être exprimés dans la même unité physique. u_i^2 a l'unité au carré; la somme garde cette unité²; la racine carrée ramène u_{RSS} à l'unité initiale. Pour des incertitudes relatives, toutes sont

sans dimension. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Vérification numérique fournie à proximité: Dix interfaces à $\pm 0,1$ mm donnent $\pm 1,0$ mm en empilement arithmétique. Si les erreurs sont indépendantes, centrées et comparables, l'écart quadratique vaut $\sqrt{10 \times 0,1^2} \approx 0,316$ mm. Un ingénieur garde séparés résultat numérique, marge et domaine de validité.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Un calcul inverse doit reconstruire l'une des données de départ à l'arrondi près.

16 — Estimation mentale

Encadrer la quantité sous la racine entre deux carrés connus; le résultat doit tomber entre leurs racines. Une valeur hors de cet intervalle révèle une erreur de saisie.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $u_{\text{RSS}} = \sqrt{\sum u_i^2}$ » dans «Point de contrôle», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Augmenter une contribution u_k augmente u_{RSS} , mais de façon quadratique à l'intérieur de la somme. Une contribution très petite devant les autres a peu d'effet.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Combinez par RSS 0,20, 0,15 et 0,10 mm.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$u_{\text{RSS}} = \sqrt{(0,04 + 0,0225 + 0,01)} = \sqrt{0,0725} \approx 0,269$ mm. La valeur est inférieure à la somme arithmétique 0,45 mm.

Exercice autonome. Combinez quatre incertitudes indépendantes de 0,10 mm.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$u_{\text{RSS}} = \sqrt{4 \times 0,10^2} = \sqrt{0,4} = 0,20$ mm.

21 — Décision mission

Cette combinaison évite un conservatisme excessif tout en conservant une traçabilité quantitative.

Un biais commun d'usinage n'est pas indépendant; appliquer RSS à des erreurs corrélées sous-estime la dérive possible.

11. Optimisation: plusieurs objectifs se contredisent

Minimiser masse, puissance, coût, temps et risque tout en maximisant marge et réparabilité crée un problème multiobjectif. Il n'existe pas forcément une solution qui domine toutes les autres. Une comparaison transparente sépare contraintes obligatoires et préférences pondérées.

La sensibilité compte autant que le classement. Si une architecture gagne seulement lorsque le poids d'un critère vaut exactement 0,31, la décision est fragile. Tester plusieurs pondérations révèle ce qui est réellement robuste.

Interprétation

Optimiser signifie choisir parmi plusieurs objectifs incompatibles. Masse, puissance, volume, coût, fiabilité, temps équipage et réparabilité ne possèdent généralement pas un minimum commun.

Ajouter un second appareil de secours augmente masse et puissance installée mais peut réduire le temps d'indisponibilité. Une fonction de mérite simple pourrait pondérer masse, énergie et risque, mais les pondérations sont elles-mêmes une décision.

Score multicritère pondéré

$$J = w_m M + w_E E + w_R R$$

1 — Question concrète

Dans «Interprétation», quelle valeur cumulée J résulte des termes de « $J = w_m M + w_E E + w_R R$ »?

2 — Intuition sans symboles

Un score pondéré combine plusieurs critères en donnant explicitement plus ou moins de poids à chacun

3 — Grandeurs

J (« j »): score de fonction objectif; w_m , w_E et w_R («double vé indice...»): poids de pondération; M («ème»): métrique de masse; E («e»): métrique d'énergie; R («erre»): troisième métrique de performance explicitement définie pour l'optimisation considérée. Ici R n'est pas la constante des gaz parfaits.

4 — Formule

$$J = w_m M + w_E E + w_R R$$

5 — Lecture

La relation se lit: « J égale w indice m M plus w indice E E plus w indice R R ».

6 — Symboles et sens

J (« j »): score de fonction objectif; w_m , w_E et w_R («double vé indice...»): poids de pondération; M («ème»): métrique de masse; E («e»): métrique d'énergie; R («erre»): troisième métrique de performance explicitement définie pour l'optimisation considérée. Ici R n'est pas la constante des gaz parfaits.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

J utilise l'unité de score choisie après normalisation; les poids sont sans dimension. M , E et R doivent être normalisés ou pondérés avec des coefficients portant les unités nécessaires pour que les trois termes additionnés soient compatibles.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Une somme pondérée additionne des critères rendus comparables. Chaque poids règle l'importance relative du critère correspondant; on ne peut pas additionner directement des kilogrammes et des joules sans normalisation ou coefficients dimensionnés.

11 — Hypothèses

Les critères doivent être normalisés de façon compatible et les poids doivent être justifiés plutôt que cachés.

12 — Contrôle d'unités

J utilise l'unité de score choisie après normalisation; les poids sont sans dimension. M , E et R doivent être normalisés ou pondérés avec des coefficients portant les unités nécessaires pour que les trois termes additionnés soient compatibles. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Exemple pédagogique : avec $w_m = 0,50$, $w_E = 0,30$, $w_R = 0,20$ et des métriques normalisées $M = 6$, $E = 8$, $R = 5$, le score vaut $J = 0,50 \times 6 + 0,30 \times 8 + 0,20 \times 5 = 6,40$. Les poids totalisent 1,00 et les trois métriques sont sur la même échelle normalisée.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Revenir au résultat par l'opération inverse fournit un contrôle indépendant.

16 — Estimation mentale

Comparer mentalement le nombre de termes et leur taille typique pour prévoir l'échelle de J; le total ne doit pas contredire cette estimation.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $J = w_m M + w_E E + w_R R$ » dans «Interprétation», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Chaque variation additive d'une contribution se transmet au total; tester les termes dominants en priorité mesure la robustesse de J.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Calculez un score pondéré avec poids 0,40/0,35/0,25 et notes 8/6/9.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$J = 0,40 \times 8 + 0,35 \times 6 + 0,25 \times 9 = 3,20 + 2,10 + 2,25 = 7,55$. Les poids somment à 1.

Exercice autonome. Avec poids 0,50/0,30/0,20 et notes 7/9/5, calculez J.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$J = 0,50 \times 7 + 0,30 \times 9 + 0,20 \times 5 = 3,5 + 2,7 + 1,0 = 7,2$.

21 — Décision mission

Le score structure une comparaison, mais la décision finale doit rester lisible critère par critère.

Un minimum numérique précis n'est pas une vérité physique si les poids, contraintes ou scénarios ont été choisis arbitrairement.

12. Mini-projet: tampon d'eau et marges

Hypothèse: appoint moyen 40 kg/jour, autonomie 30 jours, marge de planification 25 %. Stock nominal = 1 200 kg; stock avec marge = 1 500 kg. À environ 1 000 kg/m³, cela représente 1,5 m³ d'eau. [Référence canonique](#).

Le calcul ne dimensionne pas le réservoir. Structure, volume gazeux, [qualité](#), tuyauterie, fuite et stratégie de remplissage restent à traiter. Les mathématiques ont cadré une exigence; elles n'ont pas supprimé l'ingénierie.

Projet guidé — dimensionner un tampon sans cacher les hypothèses

Une base veut un tampon cylindrique d'eau capable de couvrir une interruption de production. On suppose 100 personnes, une perte nette de 0,45 kg/personne/jour après [recyclage](#), et 12 jours d'autonomie visés. Le besoin utile vaut $100 \times 0,45 \times 12 = 540$ kg, soit environ 0,54 m³ d'eau avec la densité pédagogique de 1 000 kg/m³. Ajouter 30 % de marge opérationnelle donne 702 kg ou 0,702 m³. Le mot « marge » doit rester séparé de l'incertitude sur la perte réelle. [Référence canonique](#).

Choisissons un réservoir cylindrique vertical de diamètre intérieur 1,0 m, donc rayon 0,5 m. L'aire de base vaut $\pi \times 0,5^2 \approx 0,785$ m². Pour 0,702 m³, la hauteur utile est $V/A \approx 0,894$ m. Si l'on réserve 15 % de volume libre au-dessus du liquide, le volume géométrique minimal devient $0,702/0,85 \approx 0,826$ m³, soit une hauteur totale d'environ 1,052 m. La géométrie traduit ainsi une exigence de stock en dimension physique. [Référence canonique](#).

Supposons ensuite que la perte nette de 0,45 kg/personne/jour porte une incertitude simplifiée de $\pm 0,08$. Le pire cas haut, 0,53, conduit à 636 kg utiles avant marge. Avec 30 %, le stock devient 826,8 kg. Le choix du réservoir précédent n'est plus confortable: 0,826 m³ correspond presque exactement au volume nécessaire avant même le volume libre. Le dimensionnement est donc sensible à l'incertitude de la perte et pas seulement à la précision géométrique du cylindre.

Référence canonique.

La question mathématique suivante n'est pas automatiquement « augmenter le diamètre ». Un diamètre plus grand réduit la hauteur, mais augmente la surface de certaines parois, l'encombrement au sol et peut modifier la structure. Un cylindre plus haut économise du sol mais crée d'autres contraintes. L'optimisation nécessite des objectifs: masse, volume, accessibilité, stabilité, fabrication, nettoyage. Sans fonction objectif, « optimal » ne veut rien dire.

Terminez par une courbe de sensibilité: calculez le stock requis pour 0,35; 0,45; 0,55; 0,65 kg/personne/jour. Vous obtenez une droite parce que le modèle est linéaire en perte. Si le système réel introduit un seuil, une saturation ou un rendement qui varie avec le débit, la courbe ne sera plus droite. Ce projet résume l'utilité des mathématiques: transformer une exigence verbale en équations, puis montrer où les hypothèses commandent la décision.

Mini-projet de tampon d'eau

$$M = N \times q \times t; V = M/\rho; h = V/(\pi r^2)$$

1 — Question concrète

Dans «12. Mini-projet: tampon d'eau et marges», quelles étapes faut-il suivre pour exploiter sans saut la chaîne « $M = N \times q \times t; V = M/\rho; h = V/(\pi r^2)$ »?

2 — Intuition sans symboles

Un besoin humain cumulé devient une masse d'eau, puis un volume et enfin une hauteur de stockage dans une géométrie donnée

3 — Grandeurs

M («ème»): masse totale de ressource; N («enne»): nombre de personnes; q («ku»): consommation massique par personne et par unité de temps; t («té»): durée; V («vé»): volume occupé par la masse M; ρ («rhô»): masse volumique; h («ache»): hauteur du volume cylindrique; r («erre»): rayon du cylindre; π («pi»): constante pi. Le symbole r^2 se lit « r au carré » : il signifie $r \times r$.

4 — Formule

$$M = N \times q \times t; V = M/\rho; h = V/(\pi r^2)$$

5 — Lecture

La relation se lit: «M égale N multiplié par q multiplié par t; V égale M divisé par ρ ; h égale V divisé par (πr^2)». Ici, r^2 se lit « r au carré » et vaut $r \times r$.

6 — Symboles et sens

M («ème»): masse totale de ressource; N («enne»): nombre de personnes; q («ku»): consommation massique par personne et par unité de temps; t («té»): durée; V («vé»): volume occupé par la masse M; ρ («rhô»): masse volumique; h («ache»): hauteur du volume cylindrique; r («erre»): rayon du cylindre; π («pi»): constante pi. Le symbole r^2 se lit « r au carré » : il signifie $r \times r$.

7 — Prononciation

Dire explicitement les opérations et les indices ou exposants afin qu'une autre personne puisse reconstruire la relation sans voir la page.

8 — Unités

M en kg; N comme compte de personnes; q en kg/(personne·temps); t en unité de temps cohérente; V en m³; ρ en kg/m³; h et r en m; π sans dimension.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, de période et de périmètre définie dans la section ; ne pas changer de référence au milieu du calcul.

10 — Pourquoi cette opération

Une chaîne de calcul n'est valide que si la sortie d'une étape est compatible avec l'entrée de la suivante. On conserve unités, définition et hypothèses entre les deux.

11 — Hypothèses

Consommation, durée, densité et géométrie doivent décrire le même scénario et intégrer les marges séparément.

12 — Contrôle d'unités

M en kg; N comme compte de personnes; q en kg/(personne·temps); t en unité de temps cohérente; V en m³; ρ en kg/m³; h et r en m; π sans dimension. Le résultat doit retrouver la dimension annoncée par la grandeur recherchée.

13 — Cas numérique

Exemple de contrôle issu du passage: Une base veut un tampon cylindrique d'eau capable de couvrir une interruption de production. On suppose 100 personnes, une perte nette de 0,45 kg/personne/jour après recyclage, et 12 jours d'autonomie visés. Le besoin utile vaut $100 \times 0,45 \times 12 = 540$ kg, soit environ 0,54 m³ d'eau avec la densité pédagogique de 1 000 kg/m³. Ajouter 30 % de marge opérationnelle donne 702 kg ou 0,702 m³. Le mot « marge » doit rester séparé de l'incertitude sur la perte réelle.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une étape du raisonnement : elle combine, compare ou met à l'échelle les grandeurs exactement comme l'exige le modèle.

15 — Contrôle algébrique

Revenir au résultat par l'opération inverse fournit un contrôle indépendant.

16 — Estimation mentale

Un ordre de grandeur est vérifié après chaque transformation, ce qui évite qu'une erreur précoce soit masquée par les calculs suivants.

17 — Interprétation

La lecture opérationnelle commence après l'arithmétique: pour « $M = N \times q \times t$; $V = M/\rho$; $h = V/(\pi r^2)$ » dans «12. Mini-projet: tampon d'eau et marges», préciser ce que mesure le résultat, où il s'applique et quelles conditions le rendent pertinent.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Ce calcul ne prouve ni la validité universelle du modèle ni la qualité des données d'entrée ; il répond seulement au scénario et aux hypothèses déclarés.

19 — Sensibilité

Une perturbation des données initiales est suivie tout au long des maillons afin d'identifier l'étape la plus sensible.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Dimensionnez un tampon pour 60 personnes, 0,40 kg/personne/j, 15 j, eau à 1 000 kg/m³ et un réservoir de rayon 0,50 m.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$M = Nqt = 60 \times 0,40 \times 15 = 360$ kg. $V = M/\rho = 0,36$ m³. $h = V/(\pi r^2) = 0,36/(\pi \times 0,25) \approx 0,458$ m.

Exercice autonome. Refaites avec $N=80$, $q=0,30$ kg/j, $t=10$ j et $r=0,40$ m.

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$M = 80 \times 0,30 \times 10 = 240$ kg ; $V = 0,24$ m³ ; $h = 0,24/(\pi \times 0,16) \approx 0,477$ m.

21 — Décision mission

La chaîne transforme une exigence d'autonomie en dimensions physiques de stockage.

Décomposer un vecteur en composantes

$V_x = V \cos \theta$; $V_y = V \sin \theta$

1 — Question concrète

Comment utiliser « décomposer un vecteur en composantes » sans perdre l'ordre de grandeur ni le sens de la grandeur calculée ?

2 — Intuition sans symboles

Une grandeur orientée peut être projetée sur deux axes perpendiculaires afin de savoir quelle part agit horizontalement et quelle part agit verticalement.

3 — Grandeurs

V est la norme du vecteur, θ son angle par rapport à l'axe horizontal choisi, et V_x , V_y les composantes.

4 — Formule

$$V_x = V \cos \theta ; V_y = V \sin \theta$$

5 — Lecture

Lire la relation en nommant chaque opération : $V_x = V \cos \theta$; $V_y = V \sin \theta$.

6 — Symboles et sens

V est la norme du vecteur, θ son angle par rapport à l'axe horizontal choisi, et V_x , V_y les composantes.

7 — Prononciation

Nommer explicitement les indices, exposants, angles et fonctions avant de saisir les nombres.

8 — Unités

Toutes les composantes portent la même unité que V ; les fonctions trigonométriques sont sans dimension.

9 — Convention

Conserver la convention de signe, d'angle et de chiffres significatifs annoncée dans le cours.

10 — Pourquoi cette opération

La relation isole la structure mathématique utile afin que l'échelle ou la direction soit manipulée sans ambiguïté.

11 — Hypothèses

L'angle doit être mesuré depuis l'axe annoncé, avec une convention de signe cohérente et des axes réellement perpendiculaires.

12 — Contrôle d'unités

Toutes les composantes portent la même unité que V ; les fonctions trigonométriques sont sans dimension. Le membre de gauche et le membre de droite doivent décrire la même dimension physique.

13 — Cas numérique

Pour $V = 10 \text{ m/s}$ et $\theta = 30^\circ$, $V_x \approx 8,66 \text{ m/s}$ et $V_y = 5,00 \text{ m/s}$.

14 — Pourquoi le calcul fonctionne

Chaque opération correspond à une propriété mathématique explicite ; elle ne doit pas être remplacée par un déplacement de virgule ou une touche de calculatrice non justifiée.

15 — Contrôle algébrique

Revenir de la forme calculée vers la forme initiale permet de vérifier l'algèbre indépendamment de la saisie numérique.

16 — Estimation mentale

Avant de calculer, encadrer le résultat par un ordre de grandeur ou une géométrie simple afin de détecter une erreur grossière.

17 — Interprétation

Utiliser les composantes pour une pente, une poussée inclinée, une ligne de visée ou une vitesse avant toute addition vectorielle.

18 — Ce que le résultat ne prouve pas

Le calcul ne valide ni les données d'entrée ni le modèle physique qui a conduit à choisir cette relation.

19 — Sensibilité

Modifier une donnée à la fois permet de voir si le résultat réagit linéairement, quadratiquement ou par changement de direction.

20 — Exercices guidé et autonome

Exercice guidé. Décomposez $V = 12 \text{ m/s}$ sous $\theta = 60^\circ$.

Correction guidée — ouvrir après avoir essayé

$V_x = 12 \cos 60^\circ = 6,0 \text{ m/s}$; $V_y = 12 \sin 60^\circ \approx 10,39 \text{ m/s}$. $\sqrt{6^2 + 10,39^2} \approx 12 \text{ m/s}$, ce qui contrôle la décomposition.

Exercice autonome. Décomposez $V = 20 \text{ m/s}$ sous 45° .

Correction autonome — ouvrir après avoir essayé

$V_x = V_y = 20/\sqrt{2} \approx 14,14 \text{ m/s}$.

21 — Décision mission

Utiliser les composantes pour une pente, une poussée inclinée, une ligne de visée ou une vitesse avant toute addition vectorielle.

13. Vérification de fin de module

- J'isole une inconnue et vérifie ses unités.
- Je sais quand une proportionnalité devient risquée.
- Je calcule aires, volumes et composantes vectorielles.
- Je lis dérivée comme taux et intégrale comme accumulation.
- Je distingue pire cas et combinaison statistique des incertitudes.

Série d'exercices corrigés — contrôle autonome

1. Un volume double-t-il si le rayon d'un cylindre double?

Non si la hauteur reste fixe: $V=\pi r^2 h$, donc doubler r multiplie le volume par quatre. Si rayon et hauteur doublent ensemble, le volume est multiplié par huit. [Leçon canonique](#).

2. Un rover fait 3 km est puis 4 km nord. Déplacement?

Le déplacement vaut $\sqrt{3^2+4^2}=5$ km, alors que la distance parcourue vaut 7 km. Les deux grandeurs répondent à des questions différentes. [Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

3. Un débit de 2 kg/h dure 7,5 h. Masse accumulée?

Pour un débit constant, l'intégrale devient débit×durée: $2 \times 7,5 = 15$ kg. Si le débit varie, il faut sommer les intervalles ou intégrer $q(t)$. [Référence canonique](#).

4. Une tolérance de $\pm 0,2$ mm répétée cinq fois donne-t-elle toujours ± 1 mm?

± 1 mm est le pire cas arithmétique si toutes les erreurs s'alignent. Avec erreurs indépendantes et centrées, un modèle quadratique peut être plus petit, mais l'hypothèse d'indépendance doit être justifiée.

5. Que signifie optimiser sans critère?

Rien de déterminé. Minimiser masse, énergie, coût de maintenance ou risque peut conduire à des solutions différentes. Il faut définir variables, contraintes et fonction objectif avant de parler d'optimum.

Atelier d'entraînement approfondi

Pour ces problèmes, commencez par dessiner la relation mathématique avant de substituer les nombres. Indiquez ce qui est supposé linéaire, ce qui varie avec un carré ou un volume, et ce qui constitue une contrainte plutôt qu'une inconnue. Le corrigé sert surtout à montrer comment choisir le bon modèle et comment tester sa sensibilité, pas seulement à fournir une valeur finale.

1. Isoler une variable

Avec $E=P t$, isolez P puis calculez la puissance moyenne pour 72 kWh en 9 h. [Leçon canonique](#).

Correction: $P=E/t=72/9=8$ kW. Les unités kWh/h se réduisent ici à kW. [Référence canonique](#).

Données du cas

1. Isoler une variable — Avec $E=P t$, isolez P puis calculez la puissance moyenne pour 72 kWh en 9 h. [Leçon canonique](#).

Relation

Correction: $P=E/t=72/9=8$ kW. [Référence canonique](#).

Raisonnement

Correction: $P=E/t=72/9=8$ kW. Les unités kWh/h se réduisent ici à kW. [Référence canonique](#).

Résultat

$P=E/t=72/9=8$ kW. [Référence canonique](#).

Interprétation

Les unités kWh/h se réduisent ici à kW.

2. Cylindre

Réservoir $r=1,5$ m, $L=4$ m. Volume? [Référence canonique](#).

Correction: $V=\pi r^2 L \approx \pi \times 2,25 \times 4 \approx 28,27 \text{ m}^3$. La capacité utile sera inférieure si une fraction du volume doit rester gazeuse.
[Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

Données du cas

2. Cylindre — Réservoir $r=1,5$ m, $L=4$ m. Volume? [Référence canonique](#).

Relation

Correction: $V=\pi r^2 L \approx \pi \times 2,25 \times 4 \approx 28,27 \text{ m}^3$. [Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

Raisonnement

Correction: $V=\pi r^2 L \approx \pi \times 2,25 \times 4 \approx 28,27 \text{ m}^3$. La capacité utile sera inférieure si une fraction du volume doit rester gazeuse. [Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

Résultat

$V=\pi r^2 L \approx \pi \times 2,25 \times 4 \approx 28,27 \text{ m}^3$. [Leçon canonique](#). [Référence canonique](#).

Contrôle

La capacité utile sera inférieure si une fraction du volume doit rester gazeuse.

Repères numériques conservés. $1,5\text{m} \cdot 4\text{m}$.

3. Pente

Quel dénivelé pour 250 m horizontaux à 6° ?

Correction: $\Delta z = 250 \tan 6^\circ \approx 26,3$ m. Si 250 m était la longueur de pente, il faudrait utiliser $\sin 6^\circ$. [Référence canonique](#).

La tangente s'applique parce que la distance donnée est horizontale. Si le problème avait fourni la longueur suivie sur la pente, le sinus serait la relation pertinente: identifier le triangle fait partie du calcul.

Données du cas

3. Pente — Quel dénivelé pour 250 m horizontaux à 6° ?

Relation

Correction: $\Delta z = 250 \tan 6^\circ \approx 26,3$ m. [Référence canonique](#).

Raisonnement

Correction: $\Delta z = 250 \tan 6^\circ \approx 26,3$ m. Si 250 m était la longueur de pente, il faudrait utiliser $\sin 6^\circ$. La tangente s'applique parce que la distance donnée est horizontale. Si le problème avait fourni la longueur suivie sur la pente, le sinus serait la relation pertinente: identifier le triangle fait partie du calcul. [Référence canonique](#).

Résultat

$\Delta z = 250 \tan 6^\circ \approx 26,3$ m. [Référence canonique](#).

Interprétation

Si le problème avait fourni la longueur suivie sur la pente, le sinus serait la relation pertinente: identifier le triangle fait partie du calcul.

4. Vecteurs

5 km est puis 12 km nord: déplacement et distance?

Correction: Distance parcourue=17 km; déplacement= $\sqrt{(25+144)}=13$ km. Ce sont deux grandeurs différentes. [Référence canonique](#).

Données du cas

4. Vecteurs — 5 km est puis 12 km nord: déplacement et distance?

Relation

Correction: Distance parcourue=17 km [Référence canonique](#).

Raisonnement

Correction: Distance parcourue=17 km; déplacement= $\sqrt{(25+144)}=13$ km. Ce sont deux grandeurs différentes. [Référence canonique](#).

Résultat

Distance parcourue=17 km [Référence canonique](#).

Interprétation

Ce sont deux grandeurs différentes.

Repères numériques conservés. $5\text{km} \cdot 12\text{km}$.

5. Intégration

Une charge vaut 4 kW pendant 3 h puis 1 kW pendant 9 h.

Correction: $E=12+9=21$ kWh. L'aire sous $P(t)$ donne l'énergie. [Référence canonique.](#)

Données du cas

5. Intégration — Une charge vaut 4 kW pendant 3 h puis 1 kW pendant 9 h.

Relation

Correction: $E=12+9=21$ kWh. [Référence canonique.](#)

Raisonnement

Correction: $E=12+9=21$ kWh. L'aire sous $P(t)$ donne l'énergie. [Référence canonique.](#)

Résultat

$E=12+9=21$ kWh. [Référence canonique.](#)

Interprétation

L'aire sous $P(t)$ donne l'énergie.

Repères numériques conservés. 4kw.

6. Empilement de tolérances

Six interfaces $\pm 0,2$ mm: pire cas et RSS indépendant?

Correction: Pire cas $\pm 1,2$ mm; RSS $=0,2\sqrt{6}\approx 0,490$ mm. Le RSS suppose des erreurs indépendantes et centrées. [Référence canonique.](#)

Le pire cas additionne les tolérances comme si toutes dériveraient dans le même sens; le RSS suppose au contraire des erreurs indépendantes et centrées. Choisir l'un ou l'autre modèle est une hypothèse d'ingénierie, pas une simple préférence mathématique.

Données du cas

6. Empilement de tolérances — Six interfaces $\pm 0,2$ mm: pire cas et RSS indépendant?

Relation

RSS $=0,2\sqrt{6}\approx 0,490$ mm. [Référence canonique.](#)

Raisonnement

Correction: Pire cas $\pm 1,2$ mm; RSS $=0,2\sqrt{6}\approx 0,490$ mm. Le RSS suppose des erreurs indépendantes et centrées. Le pire cas additionne les tolérances comme si toutes dériveraient dans le même sens; le RSS suppose au contraire des erreurs indépendantes et centrées. Choisir l'un ou l'autre modèle est une hypothèse d'ingénierie, pas une simple préférence mathématique. [Référence canonique.](#)

Résultat

Pire cas $\pm 1,2$ mm

Interprétation

Choisir l'un ou l'autre modèle est une hypothèse d'ingénierie, pas une simple préférence mathématique.

7. Exponentielle

Une capacité conserve 99 % par cycle. Fraction après 50 cycles?

Correction: $0,99^{50}\approx 0,605$. Une perte de 1 % répétée n'est pas une simple soustraction de 50 points de [pourcentage](#). [Référence canonique.](#)

Une perte répétée est multiplicative. Le résultat de 60,5 % après cinquante cycles montre pourquoi une petite dégradation par cycle peut devenir dominante sur la durée et pourquoi il faut vérifier si les cycles sont réellement comparables.

Données du cas

7. Exponentielle — Une capacité conserve 99 % par cycle. Fraction après 50 cycles?

Relation

Correction: $0,99^{50}\approx 0,605$. [Référence canonique.](#)

Raisonnement

Correction: $0,99^{50}\approx 0,605$. Une perte de 1 % répétée n'est pas une simple soustraction de 50 points de pourcentage. Une perte répétée est multiplicative. Le résultat de 60,5 % après cinquante cycles montre pourquoi une petite dégradation par cycle peut devenir dominante sur la durée et pourquoi il faut vérifier si les cycles sont réellement comparables. [Référence canonique.](#)

Résultat

$0,99^{50}\approx 0,605$. [Référence canonique.](#)

Contrôle

Le résultat de 60,5 % après cinquante cycles montre pourquoi une petite dégradation par cycle peut devenir dominante sur la durée et pourquoi il faut vérifier si les cycles sont réellement comparables.

Interprétation

Une perte répétée est multiplicative.

8. Capstone optimisation

Deux architectures: A=1 000 kg, 20 kW, indisponibilité 4 %; B=1 200 kg, 16 kW, indisponibilité 1 %. Pourquoi une « meilleure » solution n'existe-t-elle pas sans critère? [Référence canonique](#).

Correction: A minimise masse, B puissance et indisponibilité. Il faut définir contraintes et pondérations, par exemple une masse maximale, une puissance disponible et une pénalité de risque. L'optimisation commence donc par expliciter la décision, pas par lancer un solveur.

Aucune architecture n'est « meilleure » sans contraintes. La masse, la puissance et l'indisponibilité ont des unités différentes; une décision exige donc des limites éliminatoires ou une méthode de pondération explicitement justifiée.

Données du cas

8. Capstone optimisation — Deux architectures: A=1 000 kg, 20 kW, indisponibilité 4 %; B=1 200 kg, 16 kW, indisponibilité 1 %. Pourquoi une « meilleure » solution n'existe-t-elle pas sans critère? [Référence canonique](#).

Relation

une décision exige donc des limites éliminatoires ou une méthode de pondération explicitement justifiée.

Raisonnement

Correction: A minimise masse, B puissance et indisponibilité. Il faut définir contraintes et pondérations, par exemple une masse maximale, une puissance disponible et une pénalité de risque. L'optimisation commence donc par expliciter la décision, pas par lancer un solveur. Aucune architecture n'est « meilleure » sans contraintes. La masse, la puissance et l'indisponibilité ont des unités différentes; une décision exige donc des limites éliminatoires ou une méthode de pondération explicitement justifiée.

Résultat

A minimise masse, B puissance et indisponibilité.

Interprétation

Aucune architecture n'est « meilleure » sans contraintes.

Problèmes avancés supplémentaires

1. Surface-volume

Si toutes les dimensions d'un module sont multipliées par 2, comment varient surface et volume?

Correction raisonnée: À forme semblable, surface $\times 4$ et volume $\times 8$. Le rapport surface/volume est donc divisé par 2, ce qui peut modifier pertes thermiques et masse de paroi par volume habitable.

Données du cas

1. Surface-volume — Si toutes les dimensions d'un module sont multipliées par 2, comment varient surface et volume?

Relation

Le rapport surface/volume est donc divisé par 2, ce qui peut modifier pertes thermiques et masse de paroi par volume habitable.

Raisonnement

Correction raisonnée: À forme semblable, surface $\times 4$ et volume $\times 8$. Le rapport surface/volume est donc divisé par 2, ce qui peut modifier pertes thermiques et masse de paroi par volume habitable.

Résultat

À forme semblable, surface $\times 4$ et volume $\times 8$.

2. Dérivée discrète

Stock 500, 480, 455 kg à $t=0,2,4$ h. Taux moyens? [Référence canonique](#).

Correction raisonnée: -10 kg/h puis $-12,5$ kg/h. La perte s'accélère; une moyenne globale de $-11,25$ kg/h cache cette tendance.

Données du cas

2. Dérivée discrète — Stock 500, 480, 455 kg à $t=0,2,4$ h. Taux moyens? [Référence canonique](#).

Relation

une moyenne globale de $-11,25$ kg/h cache cette tendance.

Raisonnement

Correction raisonnée: -10 kg/h puis $-12,5$ kg/h. La perte s'accélère; une moyenne globale de $-11,25$ kg/h cache cette tendance.

Résultat

-10 kg/h puis $-12,5$ kg/h.

Interprétation

La perte s'accélère

Repères numériques conservés. 455kg.

3. Intégrale débit

Débit 2 kg/h pendant 5 h puis 0,5 kg/h pendant 10 h.

Correction raisonnée: $M=10+5=15$ kg. [Référence canonique](#).

Données du cas

3. Intégrale débit — Débit 2 kg/h pendant 5 h puis 0,5 kg/h pendant 10 h.

Relation

Débit 2 kg/h pendant 5 h puis 0,5 kg/h pendant 10 h.

Raisonnement

Correction raisonnée: $M=10+5=15$ kg. [Référence canonique](#).

Résultat

$M=10+5=15$ kg. [Référence canonique](#).

Repères numériques conservés. 2kg · 5h.

4. Mini-projet vecteur

Un rover doit contourner un obstacle: 4 km est, 3 km nord, 4 km ouest. Déplacement net?

Correction raisonnée: Le déplacement final est 3 km nord, alors que 11 km ont été parcourus. Pour l'énergie, il faut utiliser le trajet et le profil, pas le déplacement.

Le rover revient à la même abscisse mais pas à son point de départ: le déplacement est un vecteur de 3 km vers le nord. L'énergie de trajet, elle, dépend des 11 km réellement parcourus et des conditions rencontrées.

Données du cas

4. Mini-projet vecteur — Un rover doit contourner un obstacle: 4 km est, 3 km nord, 4 km ouest. Déplacement net?

Raisonnement

Correction raisonnée: Le déplacement final est 3 km nord, alors que 11 km ont été parcourus. Pour l'énergie, il faut utiliser le trajet et le profil, pas le déplacement. Le rover revient à la même abscisse mais pas à son point de départ: le déplacement est un vecteur de 3 km vers le nord. L'énergie de trajet, elle, dépend des 11 km réellement parcourus et des conditions rencontrées.

Résultat

Le déplacement final est 3 km nord, alors que 11 km ont été parcourus.

Interprétation

L'énergie de trajet, elle, dépend des 11 km réellement parcourus et des conditions rencontrées.

14. Contrôle mental des ordres de grandeur

Sans prérequis supplémentaire: avant d'accepter un résultat de calcul, vérifiez qu'il raconte encore la même réalité que l'énoncé. En mathématiques de mission, une valeur numériquement correcte peut être physiquement fausse si l'on a confondu une longueur avec une surface, une distance parcourue avec un déplacement, ou un débit avec une quantité accumulée.

- **Loi d'échelle:** si toutes les longueurs d'un objet sont doublées, une aire doit être multipliée par 4 et un volume par 8. Un calcul donnant seulement $\times 2$ pour le volume signale immédiatement une formule ou une substitution erronée.

- **Débit et durée:** un débit positif multiplié par une durée positive produit une quantité positive. Avec 2 kg/h pendant 7,5 h, l'ordre de grandeur attendu est une dizaine de kilogrammes; 0,27 kg ou 150 kg doivent déclencher une vérification des unités ou de la virgule.
- **Vecteurs:** la norme du déplacement entre départ et arrivée ne peut pas dépasser la longueur totale du trajet réellement parcouru. Après 3 km vers l'est puis 4 km vers le nord, 5 km de déplacement pour 7 km parcourus est cohérent; 8 km de déplacement ne l'est pas.
- **Dérivée:** si un stock diminue au cours du temps, son taux de variation doit être négatif avec la convention habituelle. Un signe positif peut révéler que l'on a inversé l'ordre des valeurs.
- **Intégrale:** accumuler un débit nul pendant un intervalle ne doit rien ajouter; accumuler un débit constamment positif ne peut pas faire diminuer la quantité totale. Ces tests de signe permettent de repérer une erreur avant même de refaire le calcul.
- **Unités:** une addition n'est licite qu'entre grandeurs de même nature. On peut additionner 3 kg et 5 kg, mais pas 3 kg et 5 kW. Une équation dont les deux membres n'ont pas les mêmes dimensions doit être rejetée avant toute calculatrice.

Vérification de maîtrise: reprenez un exercice du module, estimez d'abord le signe et l'ordre de grandeur du résultat sans calculatrice, puis effectuez le calcul exact. Si les deux lectures se contredisent, le bon réflexe n'est pas de choisir la calculatrice: c'est de rechercher quelle hypothèse, quelle unité ou quelle opération a été mal comprise.

Sources et références

Les références de ce module servent surtout à stabiliser unités et langage de mesure; les géométries et jeux de nombres sont des exercices construits pour apprendre la méthode.

- [NIST — Definitions of SI Base Units](#) — SI base units and exact defining constants.
- [NIST Technical Note 1297 — Measurement Uncertainty](#) — Framework for expressing measurement uncertainty.